فصل دوم- آنالیز برداری

در مطالعه مباحث الکتریسیته و مغناطیس می‌توانیم با به کار بردن نمادهای آنالیز برداری تا حد زیادی پیچیدگی نماد گذاری‌ها را کاهش دهیم. آنالیز برداری علاوه بر کوتاه نویسی با ارزش، مفاهیم فیزیکی موجود در معادلات را هم نشان می‌دهد. در این فصل مبانی آنالیز برداری را به اختصار مورد بررسی قرار داده و مقدمات لازم برای مطالعهٔ مباحث الکترومغناطیس را فراهم می‌کنیم. قابل به ذکر است این فصل در مباحث ریاضی فیزیک و ریاضی مهندسی به صورت جامع تر مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

۲-۱- تعریف‌ها:

در فیزیک مقدماتی معمولاً با چند نوع کمیت مخصوصاً با تقسیم بندی کمیت‌ها به دو دستهٔ برداری و نرده‌ای آشنا شدیم. در اینجا کافی است که کمیت نرده‌ای را به صورت زیر مجدداً تعریف کنیم:

کمیت نرده ای کمیتی است که با استفاده از بزرگی آن کاملاً مشخص می‌شود.

مانند جرم، زمان، حجم و غیره. **میدان نرده‌ای** که از تعمیم سادهٔ مفهوم کمیت نرده‌ای نتیجه می‌شود، تابعی است از مکان که در هر نقطه از فضا با بزرگی‌اش در آن نقطه کاملاً مشخص شود.

کمیت برداری را نیز ایگونه می‌توان تعریف کرد

کمیت بردار کمیتی است که با استفاده از بزرگی و جهت آن کاملاً مشخص می‌شود.

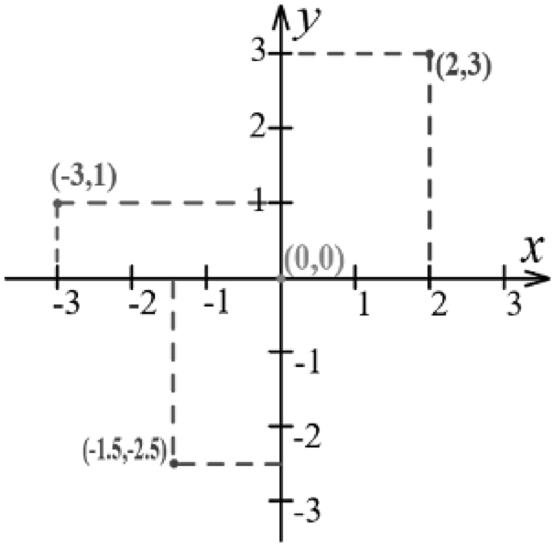
به عنوان مثال، بردار مکان نسبت به یک نقطهٔ ثابت، سرعت، شتاب، نیرو و غیره. **میدان برداری،** که از تعمیم بردار نتیجه می‌شود، تابعی است از مکان که در هر نقطه از فضا با بزرگی و جهت کاملاً مشخص می‌شود.

۲-۲- دستگاه مختصات:

از آنجایی که دراغلب مسائل فیزیک، به ویژه الکترومغناطیس، بنا به تقارن و شکل اجسام، نیاز به استفاده کردن از دستگاه‌های متفاوت می‌باشد لذا، در این بخش ابتدا اقدام به معرفی این دستگاه‌ها می‌کنیم.

۲-۲-۱- دستگاه مختصات دکارتی (کارتزین):

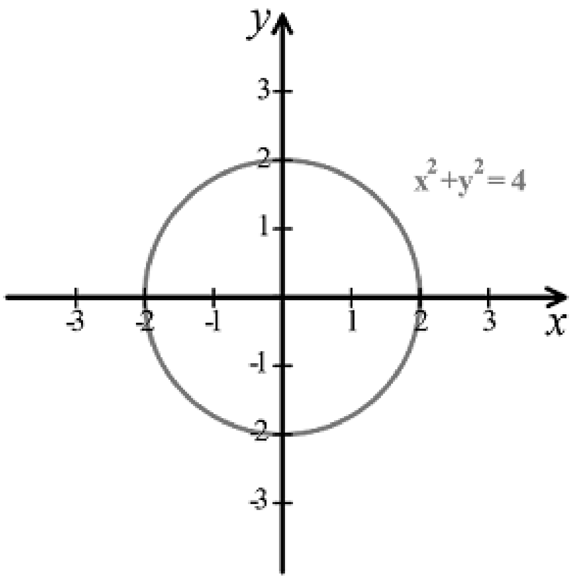
در ریاضیات، دستگاه مختصات دکارتی، یاکارتزین، یا مستطیلی، برای مشخص کردن هر نقطه منحصر به فرد در صفحه یا فضا به کار می‌رود. برای مثال، در صفحه، نقطه با دو عدد مشخص می‌شود که معمولاً مختصه x و مختصه y آن نامیده می‌شوند. برای تعریف مختصات، دو خط مستقیم قائم یا عمود بر هم (محور x یا افقی و محورy یا عمودی) با زیربازه‌های واحد(تصویر نقطه مورد نظر بر روی محور مورد مطالعه) تعیین شد ه‌اند (شکل ۲-۱).



شکل ۲-۱- دستگاه مختصات دکارتی (کارتزین) که چهار نقطه روی آن مشخص شده است.

از دستگاه مختصات دکارتی، در فضا (با سه محور مختصات) و بُعدهای بالاتر نیز استفاده می‌شود.

با استفاده از دستگاه مختصات دکارتی، اشکال هندسی (مانند منحنی‌ها) را می‌توان با معادلات جبری توصیف کرد. برای مثال، دایره‌ای به شعاع ۲ را می‌توان با معادلهٔ $x^{2} + y^{2} = 4$ بیان کرد (شکل ۲-۲).



شکل ۲-۲- دستگاه مختصات دکارتی با دایره‌ای به شعاع ۲ و مرکز مبدأ مختصات.

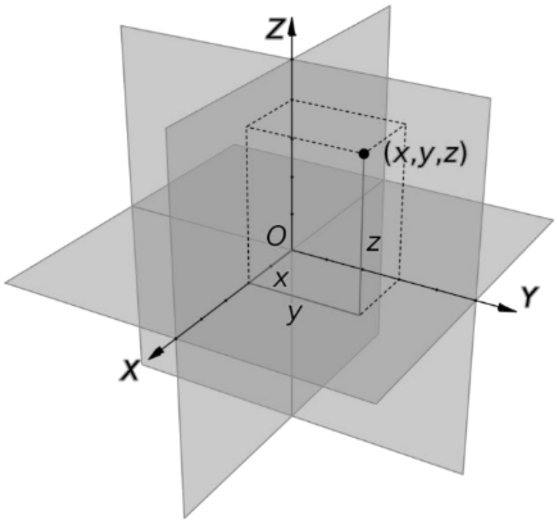
نام مختصات دکارتی، به ریاضی‌دان و فیلسوف فرانسوی، رنه دکارت[1] بر می‌گردد که در کنار سایر کارهای علمی‌اش، برای ترکیب جبر و هندسه اقلیدسی تلاش کرد. این کار، تأثیر مهمی در هندسه تحلیلی، حسابان و نقشه‌کشی داشت.

ایده دستگاه مختصات در سال ۱۶۳۷ در دو مورد از نوشته‌های دکارت معرفی شد. در نوشته دوم، دکارت ایده جدیدی برای مشخص کردن موقعیت یک نقطه یا جسم روی سطح با استفاده از دو محور متقاطع به عنوان ابزار اندازه‌گیری ارائه کرد.

[1] René Descartes

۲-۲-۱-۱- دستگاه مختصات دکارتی سه بُعدی:

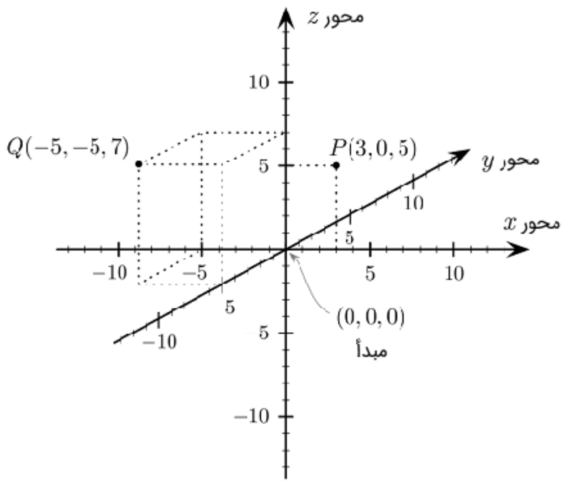
دستگاه مختصات دکارتی سه بعدی، سه بعد فضا، یعنی طول، عرض و ارتفاع را مشخص می‌کند. شکل‌های (۲-۳) و (۲-۴)، دو نمایش متداول این دستگاه مختصات را نشان می‌دهد.



شکل ۲-۳- دستگاه مختصات ۳بُعدی

محورهای دستگاه مختصات دکارتی سه بعدی، بر هم عمود هستند. مختصات یک نقطه در این دستگاه، به صورت (x , y , z) نشان داده می‌شود. مختصه‌های x ، y و z یک نقطه را می‌توان به ترتیب، با فاصله آن از صفحات y-z ، x-z و x-y نیز مشخص کرد.

شکل (۲-۳)، فاصله نقطه مورد نظر را از این صفحات نشان می‌دهد و در شکل (۲-۴) دو نقطه P(۳،۰،۵) و Q(−۵، −۵، ۷) نشان داده شده‌اند.



شکل ۲-۴- دستگاه مختصات ۳بُعدی از زاویه‌ای دیگر

صفحات y-z ، x-z و x-y فضای سه بعدی را به هشت قسمت تقسیم می‌کنند که اصطلاحاً **اوکتان**[2] یا **یک‌هشتم** نامیده می‌شوند. اگرچه در حالت دو بعدی، هر چهار ربع نامگذاری شدند، اما در دستگاه مختصات سه بعدی، فقط اوکتان اول نامگذاری می‌شود و آن قسمتی است که همه نقاط x، y و z آن مثبت هستند. محور z در این مختصات، بلندی یا ارتفاع نامیده می‌شود.

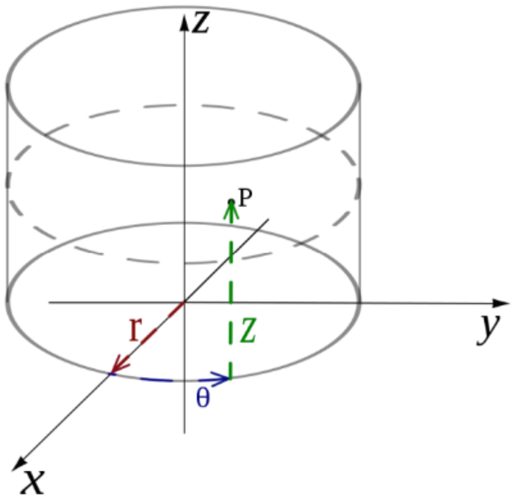
۲-۲-۲- دستگاه مختصات استوانه‌ای:

مختصات استوانه‌ای نوعی مختصات متعامد (عمود برهم) است که در آن یک نقطه، در فضا بر روی قاعدهٔ یک استوانه در نظر گرفته می‌شود. مکان آن نقطه بر اساس شعاع و ارتفاع استوانه (r و z) و زاویه‌ای که شعاع قاعده گذرنده از آن نقطه با محور x می‌سازد (θ)، بیان می‌شود. **این دستگاه، در حالت دوبعدی، با حذف**

---

[2] Octant

مختص z به مختصات قطبی تبدیل می‌شود. در فیزیـک و بـه ویـژه در مباحـث الکترومغنـاطیس و مخابرات به جای r، θ و z به ترتیب از حروف ρ، φ و z استفاده می‌شود.



شکل ۲–۵– دستگاه مختصات استوانه‌ای

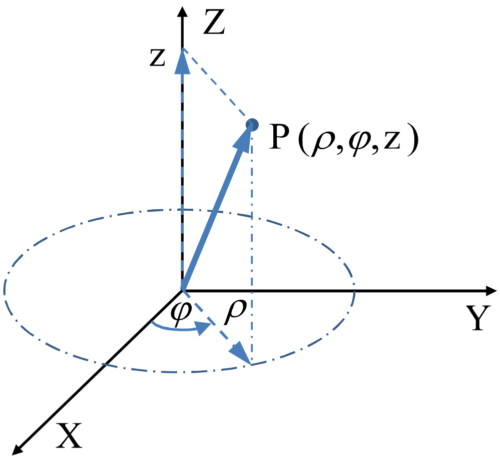
۲–۲–۲–۱– تبـدیل مختصـات اسـتوانه‌ای بـه دکارتی:

با توجه به شکل (۲–۶) به راحتی می‌توان تبدیلات زیر را بدست آورد

$$x = \rho\cos\varphi \qquad (۱–۲)$$

$$y = \rho\sin\varphi \qquad (۲–۲)$$

$$z = z \qquad (۳–۲)$$



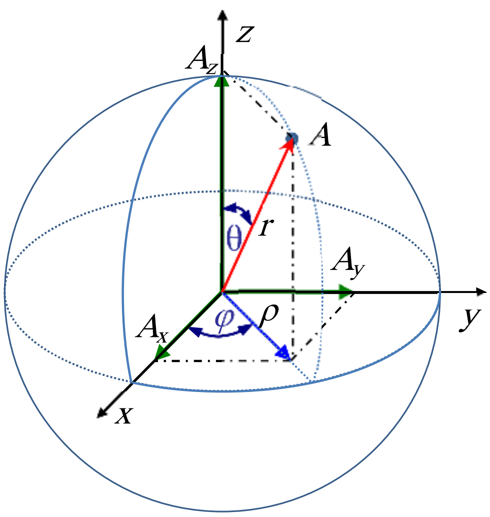
شکل ۲–۶– دستگاه مختصات استوانه‌ای از نمایی دیگر

۲–۲–۲–۲– تبـدیل مختصـات دکـارتی بـه استوانه‌ای:

$$\rho = \sqrt{x^{2} + y^{2}} \qquad (۴–۲)$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (۵–۲)$$

$$z = z \qquad (۶–۲)$$



شکل ۲–۷–تجزیه بردار در دستگاه مختصات کروی

۲–۲–۳– دستگاه مختصات کروی:

در ریاضـیات، دسـتگاه مختصـات کـروی یـک دسـتگاه مختصات برای نمایش حساب‌ها و اعداد هندسـی در فضـای سه بعدی با استفاده از سه مختصه است: فاصلهٔ شـعاعی یـک نقطه از یک مبـدأ ثابـت(r)، زاویـهٔ سـمت‌الرأس[3] از قسـمت

---

[3] zenith angle

مثبت محور z (θ) و زاویهٔ گرایی[4] از قسمت مثبت محور x (φ).

۲-۲-۳-۱- تبدیل مختصات کروی به دکارتی:

هرگاه به شکل (۲-۷) با دقت مشاهده شود خواهیم داشت

$$\rho = r\sin\theta \tag{۲-۷}$$

$$A_x = \rho\cos\varphi = r\sin\theta\cos\varphi \tag{۲-۸}$$

$$A_y = \rho\sin\varphi = r\sin\theta\sin\varphi \tag{۲-۹}$$

$$A_z = r\cos\theta \tag{۲-۱۰}$$

۲-۲-۳-۲- تبدیل مختصات دکارتی به کروی:

$$\rho = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \tag{۲-۱۱}$$

$$r = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \tag{۲-۱۲}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\rho}{A_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{A_x^2 + A_y^2}}{A_z}\right) \tag{۲-۱۳}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{A_y}{A_x}\right) \tag{۲-۱۴}$$

۲-۳- اِلمان گیری:

اِلمان در ریاضیات به قسمتی از یک دستگاه گفته می‌شود که خواص همان دستگاه را به طور کامل یا جزئی داشته باشد. در حل مسائل فیزیک در سطح دانشگاهی مسئلهٔ المان گیری در پیدا کردن میدان الکتریکی و پتانسیل الکتریکی و میدان‌های مغناطیسی مورد توجه قرار می‌گیرند. در این راستا سه نوع المان گیری وجود دارد، **اِلمان طولی، اِلمان سطحی** و **اِلمان حجمی**؛ که المان های طولی و سطحی کمیت‌هایی برداری و المان حجمی کمیتی نرده‌ای است.

۲-۳-۱- اِلمان‌ها در دستگاه دکارتی:

I- المان‌های طولی:

$$dx = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \qquad \Delta x = x_2 - x_1 \tag{۲-۱۵}$$

---

[4] azimuth angle