علاوه براین حاصل‌ضرب خارجی دارای خواص زیر است

$$\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A} \qquad (۲-۵۹)$$ خاصیت پادجابه‌جایی

$$\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C} \qquad (۲-۶۰)$$ خاصیت توزیع پذیری

۲-۴-۱۱- حاصل ضرب سه گانه:

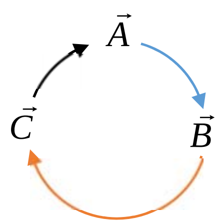
هرگاه در دستگاه دکارتی سه بردار مفروض $\vec{A}$، $\vec{B}$ و $\vec{C}$ داشته باشیم و بخواهیم ترکیبات دو ضرب داخلی و خارجی را بر آن اثر دهیم دو حالت از چهار حالت ممکن دارای مفهوم خواهد بود:

$$\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})=\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \qquad (۲-۶۱)$$ سه گانه نرده‌ای

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}.\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}.\vec{B})=\vec{D} \qquad (۲-۶۲)$$ سه گانه برداری

نکته: در ضرب سه‌گانه نرده‌ای جایگشت‌ها از چرخش شکل (۱۷-۲) تبعیت می‌کنند یعنی،

$$\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}.(\vec{C}\times\vec{A})=\vec{C}.(\vec{A}\times\vec{B}) \qquad (۲-۶۳)$$



شکل ۲-۱۷- جهت چرخش جایگشتی بدون تغییر

۲-۵- شیب و گرادیان:

مفهوم شیب در ریاضیات به نتایج حاصل از مشتق و انتگرال گیری یعنی حساب دیفرانسیل و انتگرال برداری ختم می‌شود و ساده‌ترین تعمیم، رابطه میان یک **میدان برداری** خاص و مشتق‌های یک **میدان عددی** است.

حال اگر میدان عددی، تابعی از مکان در مختصات دکارتی فرض شود، یعنی

$$\phi \doteq \phi(x,y,z) \qquad (۲-۶۱)$$

و دیفرانسیل بردار مکان به صورت زیر باشد

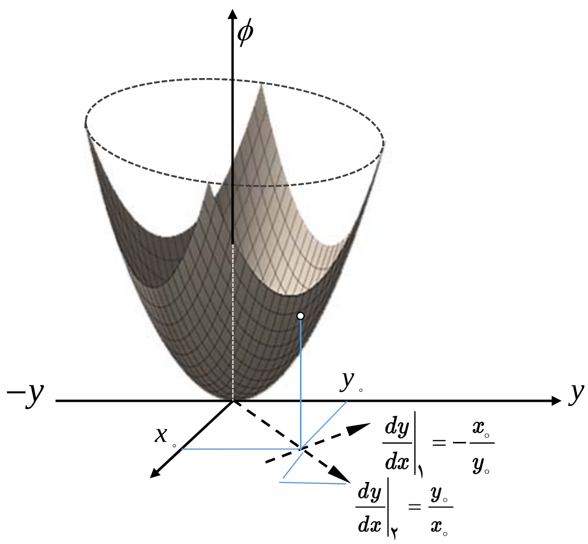
$$d\vec{s} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k} \qquad (۲-۶۲)$$

لذا اگر $ds = \sqrt{(dx)^۲ + (dy)^۲ + (dz)^۲}$ بزرگی عددی بردار $d\vec{s}$ باشد، **مشتق جهتی** آن عبارت است از:

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{dz}{ds} \qquad (۲-۶۳)$$

بنابراین، **مشتق جهتی عبارت است از آهنگ تغییر تابع در یک جهت مشخص.**

مثال ۲-۱: مشتق جهتی میدان نرده‌ای دو بعدی $\phi(x,y) = x^۲ + y^۲$ را در نقطهٔ $x_\circ$ و $y_\circ$ در سه جهت $\left.\frac{dy}{dx}\right|_۱ = -\frac{x_\circ}{y_\circ}$، $\left.\frac{dy}{dx}\right|_۲ = \frac{y_\circ}{x_\circ}$ و $\left.\frac{dy}{dx}\right|_۳ = \alpha$ نمایش داده شده در شکل (۲-۱۷) بدست آورید.



شکل ۲-۱۷- نمایش میدان عددی و دوبعدی $\phi = x^۲ + y^۲$ در فضای ۳ بعدی دکارتی

جواب:

برای جهت اول ($\left.\frac{dy}{dx}\right|_۱ = -\frac{x_\circ}{y_\circ}$) داریم:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{ds} = -\frac{x_\circ}{y_\circ}\frac{dx}{ds} \qquad (۲-۶۴-۱)$$

$$\left.\frac{d\phi}{ds}\right|_{x_\circ,y_\circ} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{ds} = \left(۲x_\circ - ۲y_\circ\frac{x_\circ}{y_\circ}\right)\frac{dx}{ds} = \circ \qquad (۲-۶۴-۲)$$

برای جهت دوم ($\left.\frac{dy}{dx}\right|_۲ = \frac{y_\circ}{x_\circ}$) داریم:

$$ds = \sqrt{(dx)^۲ + (dy)^۲} = dx\sqrt{۱ + (\frac{dy}{dx})^۲} \qquad (۲-۶۴-۳)$$

$$\left.\frac{ds}{dx}\right|_{x_\circ,y_\circ}=\sqrt{۱+(\frac{dy}{dx})^۲}=\frac{\sqrt{x_\circ^۲+y_\circ^۲}}{x_\circ} \qquad (۲-۶۴-۴)$$

$$\frac{dy}{ds}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{ds}=\frac{y_\circ}{x_\circ}\frac{dx}{ds} \qquad (۲-۶۴-۵)$$

$$\left.\frac{d\phi}{ds}\right|_{x_\circ,y_\circ}=\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{ds}=\left(۲x_\circ+۲y_\circ\frac{y_\circ}{x_\circ}\right)\frac{dx}{ds}$$

$$=\left(۲x_\circ+۲y_\circ\frac{y_\circ}{x_\circ}\right)\frac{x_\circ}{\sqrt{x_\circ^۲+y_\circ^۲}}=۲\sqrt{x_\circ^۲+y_\circ^۲} \qquad (۲-۶۴-۶)$$

برای جهت سوم ($\left.\frac{dy}{dx}\right|_۳=\alpha$) داریم:

$$\left.\frac{ds}{dx}\right|_{x_\circ,y_\circ}=\sqrt{۱+(\frac{dy}{dx})^۲}=\sqrt{۱+\alpha^۲} \qquad (۲-۶۴-۷)$$

$$\frac{dy}{ds}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{ds}=\alpha\frac{dx}{ds} \qquad (۲-۶۴-۸)$$

$$\left.\frac{d\phi}{ds}\right|_{x_\circ,y_\circ}=\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{ds}=\left(۲x_\circ+۲\alpha y_\circ\right)\frac{dx}{ds}$$

$$=\left(۲x_\circ+۲\alpha y_\circ\right)\frac{۱}{\sqrt{۱+\alpha^۲}} \qquad (۲-۶۴-۹)$$

حال اگر بخواهیم بیشینه یا کمینه مشتق جهتی فوق را به د ست آوریم می‌بایست از رابطهٔ (۹-۶۴-۲) نسبت به α مشتق گرفته و برابر با صفر قرار دهیم.

$$\frac{۲y_\circ}{\sqrt{۱+\alpha^۲}}-\frac{(۲x_\circ+۲\alpha y_\circ)\alpha}{\sqrt{(۱+\alpha^۲)^۳}}=\circ \qquad (۲-۶۵-۱)$$

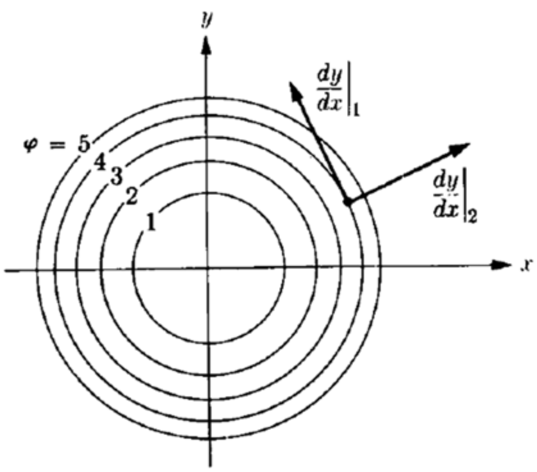
بنابراین از حل معادله فوق خواهیم داشت

$$\alpha=\frac{y_\circ}{x_\circ} \qquad (۲-۶۵-۲)$$

که نشان می‌دهد جهتی که تابع نرده‌ای $\phi(x,y)=x^{2}+y^{2}$ بیشینه می‌شود **شعاعی** است. حال اگر جهت مشتق بدست آمده در نقطهٔ مورد نظر، به سمت خارج باشد این بیشینه افزایشی و اگر به سمت داخل باشد بیشینه کاهشی (کمینه افزایشی) خواهد بود.

بر این اساس در جهت مفروض اول، چون حاصل مشتق جهتی صفر شده است، معادله (۲-۶۴-۲)، که تابع $\phi(x,y)=x^{2}+y^{2}$ در این راستا ثابت است. بنابراین **جهتی که در آن $\frac{d\phi}{ds}=0$ است، منحنی ϕ در آن نقطه مورد نظر، ثابت خواهد بود و خطوطی حاصل می‌شود که خطوط تراز یا خطوط ارتفاع معروفند.**

مفهوم خطوط تراز را می‌توانیم به یک تابع سه متغیری که در آن سطوح $\phi(x,y,z)=\text{const}$ سطوح تراز یا سطوح هم پتانسیل نامیده می‌شوند تعمیم دهیم.



شکل ۲-۱۸- تابع $\phi(x,y)$ مربوط به شکل (۲-۱۷) که به صورت نقشهٔ خطوط تراز رسم شده است.

- **شیب تابع نرده‌ای ϕ برداری است که بزرگی آن برابر بیشینهٔ مشتق جهتی در نقطهٔ مورد نظر و جهت آن جهت بیشینهٔ مشتق جهتی در آن نقطه است.**
- **جهت شیب در هر نقطه بر سطح تراز ϕ در آن نقطه عمود است.**

مشتق جهتی برحسب شیب با رابطهٔ زیر داده می‌شود:

$$\frac{d\phi}{ds}=\left|\nabla\phi\right|\cos\theta \qquad (۲-۶۶)$$

که در آن θ زاویه میان جهت $d\vec{s}$ و جهت شیب است. بنابراین رابطهٔ فوق را به صورت زیر بازنویسی کرد

$$\frac{d\phi}{ds}=\nabla\phi.\frac{d\vec{s}}{ds} \qquad (۲-۶۷)$$

بردار $d\vec{s}$ در مختصات دکارتی عبارت است از

$$d\vec{s} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k} \qquad (۲-۶۸)$$
(المان بردار جابه‌جایی در مختصات دکارتی)

لذا رابطه (۶۳-۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}dy + \frac{\partial \phi}{\partial z}dz \qquad (۲-۶۹)$$
(دیفرانسیل تابع نرده‌ای در مختصات دکارتی)

بنابراین

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\hat{k} \qquad (۲-۷۰)$$
(گرادیان تابع نرده‌ای در مختصات دکارتی)

به روشی مشابه در دستگاه‌های استوانه‌ای و کروی خواهیم داشت،

$$d\vec{s} = d\rho\hat{e}_\rho + \rho d\varphi\hat{e}_\varphi + dz\hat{k} \qquad (۲-۷۱)$$
(المان بردار جابه‌جایی در مختصات استوانه‌ای)

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial \rho}d\rho + \frac{\partial \phi}{\partial \varphi}d\varphi + \frac{\partial \phi}{\partial z}dz \qquad (۲-۷۲)$$
(دیفرانسیل تابع نرده‌ای در مختصات استوانه‌ای)

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial \rho}\hat{e}_\rho + \frac{۱}{\rho}\frac{\partial \phi}{\partial \varphi}\hat{e}_\varphi + \frac{\partial \phi}{\partial z}\hat{k} \qquad (۲-۷۳)$$
(گرادیان تابع نرده‌ای در مختصات استوانه‌ای)

$$d\vec{s} = dr\hat{e}_r + rd\theta\hat{e}_\theta + r\sin\theta d\varphi\hat{e}_\varphi \qquad (۲-۷۴)$$
(المان بردار جابه‌جایی در مختصات کروی)

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial r}dr + \frac{\partial \phi}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial \phi}{\partial \varphi}d\varphi \qquad (۲-۷۵)$$
(دیفرانسیل تابع نرده‌ای در مختصات کروی)

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{۱}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\hat{e}_\theta + \frac{۱}{r\sin\theta}\frac{\partial \phi}{\partial \varphi}\hat{e}_\varphi \qquad (۲-۷۶)$$
(گرادیان تابع نرده‌ای در مختصات کروی)

۲-٦- انتگرال گیری برداری:

انواع انتگرال گیری:
۱- خطی (یک بعدی)
۲- سطحی (دو بعدی)
۳- حجمی (سه بعدی)