$$d\vec{s} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k} \quad \text{(۲-۶۸)}$$
(المان بردار جابه‌جایی در مختصات دکارتی)

لذا رابطه (۶۳-۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}dy + \frac{\partial \phi}{\partial z}dz \quad \text{(۲-۶۹)}$$
(دیفرانسیل تابع نرده‌ای در مختصات دکارتی)

بنابراین

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\hat{k} \quad \text{(۲-۷۰)}$$
(گرادیان تابع نرده‌ای در مختصات دکارتی)

به روشی مشابه در دستگاه‌های استوانه‌ای و کروی خواهیم داشت،

$$d\vec{s} = d\rho\hat{e}_\rho + \rho d\varphi\hat{e}_\varphi + dz\hat{k} \quad \text{(۲-۷۱)}$$
(المان بردار جابه‌جایی در مختصات استوانه‌ای)

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial \rho}d\rho + \frac{\partial \phi}{\partial \varphi}d\varphi + \frac{\partial \phi}{\partial z}dz \quad \text{(۲-۷۲)}$$
(دیفرانسیل تابع نرده‌ای در مختصات استوانه‌ای)

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial \rho}\hat{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \phi}{\partial \varphi}\hat{e}_\varphi + \frac{\partial \phi}{\partial z}\hat{k} \quad \text{(۲-۷۳)}$$
(گرادیان تابع نرده‌ای در مختصات استوانه‌ای)

$$d\vec{s} = dr\hat{e}_r + rd\theta\hat{e}_\theta + r\sin\theta d\varphi\hat{e}_\varphi \quad \text{(۲-۷۴)}$$
(المان بردار جابه‌جایی در مختصات کروی)

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial r}dr + \frac{\partial \phi}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial \phi}{\partial \varphi}d\varphi \quad \text{(۲-۷۵)}$$
(دیفرانسیل تابع نرده‌ای در مختصات کروی)

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\hat{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \phi}{\partial \varphi}\hat{e}_\varphi \quad \text{(۲-۷۶)}$$
(گرادیان تابع نرده‌ای در مختصات کروی)

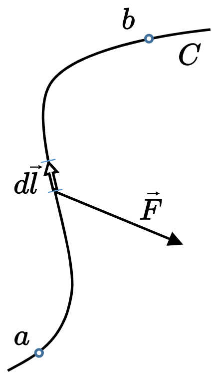
٦-٢- انتگرال گیری برداری:

انواع انتگرال گیری:
- ۱- خطی (یک بعدی)
- ۲- سطحی (دو بعدی)
- ۳- حجمی (سه بعدی)

۱-۶-۲- انتگرال خطی:

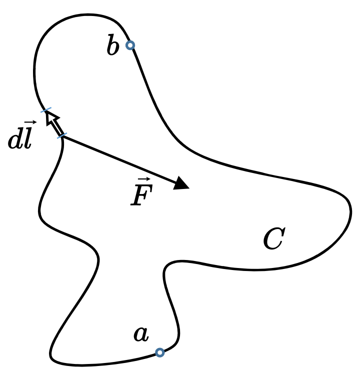
اگر $\vec{F}$ بردار باشد، انتگرال خطی $\vec{F}$ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\int_{a\ C}^{b} \vec{F}.d\vec{l} \qquad (۲-۷۷)$$



شکل ۲-۱۹ المان جابجایی $d\vec{l}$ روی منحنی C.

که در آن C منحنیی است که انتگرال در امتداد آن محاسبه می شود، a و b نقاط مبدأ و مقصد در روی این منحنی‌اند و $d\vec{l}$ بردار تغییر مکان (جابه‌جایی) بی‌نهایت کوچکی است در امتداد منحنی C. چون $\vec{F}.d\vec{l}$ کمیتی نرده‌ای است، بنابراین نتیجهٔ انتگرال گیری نیز کمیتی نرده‌ای خواهد بود.



شکل ۲-۲۰ المان جابجایی $d\vec{l}$ روی منحنی بستهٔ C.

حدود انتگرال گیری و باز یا بسته بودن منحنی مورد مطالعه دارای اهمیت فراوانی در محاسبات انتگرالی است تا جایی که برای محاسبه انتگرال در مسیرهای بسته از نماد خاصی استفاده می شود که عبارت است از:

$$\oint_{C} \vec{F}.d\vec{l} \qquad (۲-۷۸)$$

توجه: انتگرال روی یک منحنی بسته ممکن است صفر باشد و یا نباشد؛ اما **آن بردارهایی که برای آن‌ها انتگرال خطی روی هر منحنی بسته‌ای صفر است از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.**

از این رو اغلب به انتگرال‌های خطی روی منحنی‌های بستهٔ نامشخص بر می‌خوریم یعنی

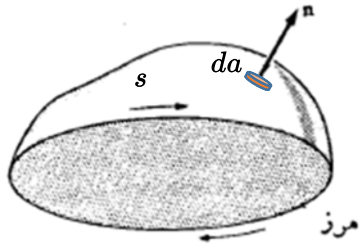
$$\oint \vec{F}.d\vec{l} \qquad (۲-۷۹)$$

که در محدودهٔ وسیعی عمل نموده و به شکل منحنی C بستگی **ندارد**.

۲-۶-۲- انتگرال سطحی:

اگر $\vec{F}$ بردار باشد، انتگرال سطحی $\vec{F}$ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\int_s \vec{F}.\hat{n}da \qquad (۲-۸۰)$$



شکل ۲-۲۱- ارتباط بردار عمود بر سطح، $\hat{n}$، و جهت چرخش روی مرز.

که در آن s سطحی است که انتگرال گیری روی آن انجام می‌شود، da سطح بسیار کوچکی از s است، $\hat{n}$ بردار یکهٔ عمود بر da است.

نحوه تعیین راستای بردار یکهٔ $\hat{n}$:

۱. هرگاه سطح بسته باشد: در این حالت $\hat{n}$ عمود بر سطح و به سمت خارج از سطح است.
۲. هرگاه سطح باز باشد: در این حالت یک خط مرزی خواهیم داشت که می‌توان بر روی آن یک چرخش راستگرد تصور کرد و بعد از آن، سوی مثبت چرخش راستگرد، معرف جهت $\hat{n}$ است.

هرگاه سطح مورد مطالعه بسته باشد خواهیم داشت:

$$\oint_s \vec{F}.\hat{n}da \qquad (۲-۸۱)$$

توجه: انتگرال سطحی کمیتی نرده‌ای ا ست؛ مقدار آن معمولا به سطح s ب ستگی دارد اما اگر واب ستگی وجود نداشته باشد اهمیت آن به مراتب بیشتر خواهد بود.

۲-۶-۳- انتگرال حجمی:

اگر $\vec{F}$ بردار و ϕ یک کمیت نرده‌ای باشد، انتگرال حجمی به دو صورت زیر نوشته می‌شود:

$$J = \int_V \phi dv \qquad (۲-۸۲)$$

$$\vec{K} = \int_V \vec{F} dv \qquad (۲-۸۳)$$

بدیهی است که J یک کمیت نرده‌ای و $\vec{K}$ بردار است.

۲-۷- واگرایی:[۷]

دومین عملگر مشتق گیری که بر روی بردارها اثر می‌گذارد عملگر واگرایی(دیورژانس) است که در فضای ۳ بعدی به صورت «$\nabla.$» نوشته می‌شود و بنابر تعریف، عبارت است از:

واگرایی هر بردار، حد انتگرال سطحی آن بردار در واحد حجم است هرگاه حجم محصور شده توسط آن به سمت صفر میل کند.

یعنی:

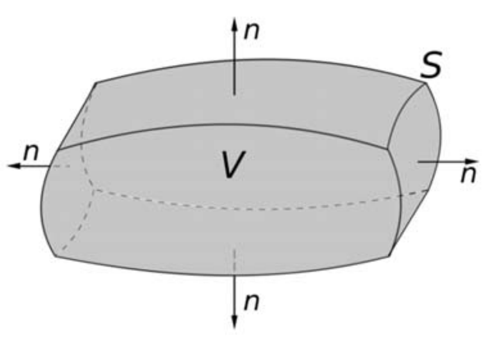
$$div\vec{F} \doteq \nabla.\vec{F} = \lim_{v\to ۰}\left(\frac{۱}{v}\oint_s \vec{F}.\hat{n}da\right) \qquad (۲-۸۴)$$

واضح است که واگرایی، یک کمیت نرده‌ای است. رابطهٔ واگرایی در دستگاه‌های متفاوت به صورت زیر است:

(۲-۸۵)	$\nabla.\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$	(دستگاه دکارتی)
(۲-۸۶)	$\nabla.\vec{F} = \frac{۱}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho F_\rho\right) + \frac{۱}{\rho}\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$	(دستگاه استوانه‌ای)
(۲-۸۷)	$\nabla.\vec{F} = \frac{۱}{r^۲}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^۲ F_r\right) + \frac{۱}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta F_\theta\right) + \frac{۱}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}$	(دستگاه کروی)

قضیهٔ واگرایی: انتگرال واگرایی یک بردار در حجم V برابر است با انتگرال سطحی مؤلفهٔ قائم آن بردار روی سطحی که V را محصور می‌کند.

$$\int_V \nabla.\vec{F}dv = \oint_s \vec{F}.\hat{n}da \qquad (۲-۸۸)$$



شکل ۲-۲۲- حجم V که با سطح S محدود شده و با بردار یکهٔ $\hat{n}$ جهت گیری کرده است

[۷] *Divergence*

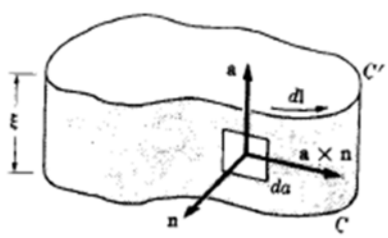
۸-۲- تاو[۸]

سـومین عملگر دیفرانسـیلی برداری جالب توجه، عملگر تاو (کِرل) اسـت. تاو یک بردار در فضـای ۳ بعدی به صورت «$\nabla\times$» نوشته شده و چنین تعریف می‌شود:

تاو هر بردار عبارت است از حد نسبت انتگرالِ سطحیِ ضربِ برداریِ آن بردار در بردار یکهٔ عمود بر سطح بسته (در جهت خارج آن سطح)، به حجم محصور به وسیلهٔ آن سطح، وقتی که حجم به سمت صفر میل کند؛ یعنی

$$\nabla\times\vec{F}=\lim_{v\to 0}\frac{1}{v}\oint_s \hat{n}\times\vec{F}da \qquad (۲-۸۹)$$

این تعریف و تعریف واگرایی کاملا به هم شـبیه‌اند، با این تفاوت که **به جای ضـرب نرده‌ای** بردار در بردار یکهٔ $\hat{n}$ **از ضـرب برداری** استفاده شده است.



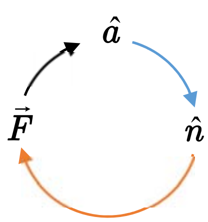
شکل ۲-۲۳- حجمی که در اثر تغییر مکان منحنی C در راستای بردار یکهٔ عمودش، $\hat{a}$ ، به وجود می‌آید.

مولفهٔ $\nabla\times\vec{F}$ در راستای بردار یکهٔ $\hat{a}$ برابر است با حد انتگرال خطی در واحد سطح، هنگامی که سطح محصور به خط (که بر $\hat{a}$ عمود اسـت) به سـمت صـفر میل کند؛ یعنی

$$\hat{a}.\nabla\times\vec{F}=\lim_{v\to 0}\frac{1}{v}\oint_s \hat{a}.\left(\hat{n}\times\vec{F}\right)da$$

$$=\lim_{v\to 0}\frac{1}{v}\oint_s \vec{F}.\left(\hat{a}\times\hat{n}\right)da \qquad (۲-۹۰)$$

$$=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\oint_C \vec{F}.d\vec{l}$$



شکل ۲-۲۴- جهت چرخش جایگشتی بدون تغییر

که در آن منحنی C که مرز سطح s است در صفحه‌ای قرار دارد که بر بردار یکهٔ $\hat{a}$ عمود است. هرگاه مطابق شکل (۲-۲۳) صفحهٔ حامل منحنی C در راستای $\hat{a}$ به میزان ξ جابه‌جا شود و آن را C' بنامیم خواهیم داشت

$$\vec{a}\times\vec{n}da=\xi d\vec{l} \qquad (۲-۹۱)$$

---

[۸] *curl*

که در آن $d\vec{l}$ تغییر مکان بی‌نهایت کوچکی روی منحنی C اســـت. علاوه بر این، چون $v=\xi s$، بنابراین، حد انتگرال حجمی درست برابر است با

$$\hat{a}.\nabla\times\vec{F}=\lim_{s\to ۰}\frac{۱}{\xi s}\oint\vec{F}.\xi d\vec{l}\quad\Rightarrow\quad\hat{a}.\nabla\times\vec{F}=\lim_{s\to ۰}\frac{۱}{s}\oint\vec{F}.d\vec{l}\qquad (۲-۹۲)$$

که با حذف ξ ها این رابطه به صـــورت تعریف دوم تاو (۲-۹۰) در می‌آید. با اســـتفاده از تعاریف فوق در دستگاه‌های مختصات متفاوت خواهیم داشت

$$\nabla\times\vec{F}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}\qquad (۲-۹۳)$$

(دستگاه دکارتی)

$$\nabla\times\vec{F}=\frac{۱}{\rho}\begin{vmatrix} e_\rho & \rho e_\varphi & e_z\\ \dfrac{\partial}{\partial\rho} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ F_\rho & \rho F_\varphi & F_z\end{vmatrix}\qquad (۲-۹۴)$$

(دستگاه استوانه‌ای)

$$\nabla\times\vec{F}=\frac{۱}{r^{۲}\sin\theta}\begin{vmatrix} e_r & re_\theta & -r\sin\theta e_\varphi\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi}\\ F_r & rF_\theta & r\sin\theta F_\varphi\end{vmatrix}\qquad (۲-۹۵)$$

(دستگاه کروی)

قضیهٔ استوکس: انتگرال خطی یک بردار روی یک منحنی بسته برابر است با انتگرال سطحی مؤلفهٔ قائم تاو آن بردار روی هر سطحی که توسط این منحنی محصور شده باشد؛ یعنی

$$\oint_C\vec{F}.d\vec{l}=\left(\nabla\times\vec{F}.\hat{n}\right)s=\int_s\nabla\times\vec{F}.\hat{n}da\qquad (۲-۹۶)$$

که در آن C منحنی بستهٔ پیرامون سطح s است.

۲-۹- عملیات تکمیلی:

عملیاتی که با عملگر «دل» (∇) بیان می‌شوند خود به انتخاب دستگاه مختصات خاصی بستگی ندارند و مستقل از دستگاه مختصات هستند. بر این اساس اتحادهای دیفرانسیلی برداری را می توان به صورت زیر خلاصه کرد.

قضیه گرادیان	$\int_{a\ C}^{b} \nabla \phi . d\vec{l} = \int_{a}^{b} d\phi = \phi\Big\vert_{a}^{b} = \phi_b - \phi_a = \Delta\phi$	(۲-۹۷)
قضیه واگرایی	$\int_V \nabla . \vec{F} dv = \oint_s \vec{F} . \hat{n} da$	(۲-۹۸)
قضیه استوکس	$\int_s \nabla \times \vec{F} . \hat{n} da = \oint_C \vec{F} . d\vec{l}$	(۲-۹۹)
توزیع پذیری گرادیان	$\nabla(a\phi + b\psi) = a\nabla\phi + b\nabla\psi$	(۲-۱۰۰)
توزیع پذیری واگرایی	$\nabla.(a\vec{F} + b\vec{G}) = a\nabla.\vec{F} + b\nabla.\vec{G}$	(۲-۱۰۱)
توزیع پذیری تاو	$\nabla \times (a\vec{F} + b\vec{G}) = a\nabla \times \vec{F} + b\nabla \times \vec{G}$	(۲-۱۰۲)
عملگر لاپلاسی n بُعدی	$\nabla.\nabla\phi = \nabla^2\phi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2}$	(۲-۱۰۳)
لاپلاسین (دکارتی)	$\nabla^2\phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi$	(۲-۱۰۴)
لاپلاسین (استوانه‌ای)	$\nabla^2\phi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$	(۲-۱۰۵)
لاپلاسین (کروی)	$\nabla^2\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\phi) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}$	(۲-۱۰۶)
	$\nabla \times \nabla\phi = 0$	(۲-۱۰۷)
	$\nabla.\nabla \times \vec{F} = \nabla \times \nabla.\vec{F} = 0$	(۲-۱۰۸)
	$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{F}\right) = \nabla\left(\nabla.\vec{F}\right) - \nabla^2\vec{F}$	(۲-۱۰۹)
	$\nabla\left(\phi\psi\right) = \left(\nabla\phi\right)\psi + \phi\nabla\psi$	(۲-۱۱۰)
	$\nabla\left(\vec{F}.\vec{G}\right) = \left(\nabla \times \vec{F}\right).\vec{G} + \vec{F} \times \left(\nabla \times \vec{G}\right) + \left(\vec{G}.\nabla\right)\vec{F} + \vec{G} \times \left(\nabla \times \vec{F}\right)$	(۲-۱۱۱)
	$\nabla.\left(\phi\vec{F}\right) = \left(\nabla\phi\right).\vec{F} + \phi\nabla.\vec{F}$	(۲-۱۱۲)
	$\nabla \times \left(\phi\vec{F}\right) = \left(\nabla\phi\right) \times \vec{F} + \phi\nabla \times \vec{F}$	(۲-۱۱۳)
	$\nabla.\left(\vec{F} \times \vec{G}\right) = \left(\nabla \times \vec{F}\right).\vec{G} - \left(\nabla \times \vec{G}\right).\vec{F}$	(۲-۱۱۴)
	$\nabla \times \left(\vec{F} \times \vec{G}\right) = \left(\nabla.\vec{G}\right)\vec{F} - \left(\nabla.\vec{F}\right)\vec{G} + \left(\vec{G}.\nabla\right)\vec{F} - \left(\vec{F}.\nabla\right)\vec{G}$	(۲-۱۱۵)

۲-۱۰- حالت‌های خاص:

در این قسمت قصد داریم برخی از توابع پرکاربرد در الکترومغناطیس را بررسی کنیم. لذا برای سادگی موضوع از دستگاه مختصات دکارتی استفاده می‌کنیم. واضح است که پاسخ‌ها در دیگر مختصات‌ها نیز برقرارند.

۲-۱۰-۱- هرگاه تابع برداری، بردار مکان r باشد

$$\vec{F}=\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k} \quad (۲-۱۱۶-۱)$$

$$\nabla.\vec{r}=۳ \quad (۲-۱۱۶-۲)$$

$$\nabla\times\vec{r}=۰ \quad (۲-۱۱۶-۳)$$

$$\left(\vec{G}.\nabla\right)\vec{r}=\vec{G}.\nabla\vec{r}=\vec{G} \quad (۲-۱۱۶-۴)$$

$$\nabla^{۲}\left|\vec{r}\right|=\nabla^{۲}r=۰ \quad (۲-۱۱۶-۵)$$

برای تابعی که تنها وابسته به فاصله باشد یعنی

$$r=\left|\vec{r}\right|=\sqrt{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}} \quad (۲-۱۱۷-۱)$$

داریم

$$\phi=\phi(r) \quad (۲-۱۱۷-۲)$$

$$\vec{F}=\vec{F}(r) \quad (۲-۱۱۷-۳)$$

$$\nabla=\frac{\vec{r}}{r}\frac{d}{dr}=\hat{e}_r\frac{d}{dr} \quad (۲-۱۱۷-۴)$$

۲-۱۰-۲- تابعی که به شناسهٔ $\vec{A}.\vec{r}$ بستگی دارد، و در آن $\vec{A}$ بردار ثابتی است

$$j=j(\vec{A}.\vec{r}) \quad (۲-۱۱۸-۱)$$

$$\vec{F}=\vec{F}(\vec{A}.\vec{r}) \quad (۲-۱۱۸-۲)$$

$$\nabla=\frac{\vec{A}}{r}\frac{d}{d\left(\vec{A}.\vec{r}\right)} \quad (۲-۱۱۸-۳)$$

۳-۱۰-۲- تابعی که به شناسهٔ $\vec{R}=\vec{r}-\vec{r}'$ بستگی دارد و $\vec{r}'$ مبدأ ثابت آن است

$$\vec{R}=(x-x')\hat{i}+(y-y')\hat{j}+(z-z')\hat{k}=X\hat{i}+Y\hat{j}+Z\hat{k} \tag{۲-۱۱۹-۱}$$

$$\nabla=\nabla_R=\hat{i}\frac{\partial}{\partial X}+\hat{j}\frac{\partial}{\partial Y}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial Z} \tag{۲-۱۱۹-۲}$$

$\nabla'=-\nabla$ یا

$$\hat{i}\frac{\partial}{\partial x'}+\hat{j}\frac{\partial}{\partial y'}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z'}=-\left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{۲-۱۱۹-۳}$$

۱۱-۲- قضیهٔ گرین:

چندین امکان برای بسط قضیهٔواگرایی و قضیهٔ استوکس وجود دارد و جالبترین آن‌ها قضیهٔ گرین است . لذا هرگاه داشته باشیم

$$\vec{F}=\psi\nabla\phi-\phi\nabla\psi \tag{۲-۱۲۰}$$

با قرار دادن آن در قضیهٔ واگرایی (۲-۸۸)

$$\int_V \nabla.(\psi\nabla\phi-\phi\nabla\psi)\,dv=\oint_s(\psi\nabla\phi-\phi\nabla\psi).\hat{n}da \tag{۲-۱۲۱}$$

و با استفاده از اتحاد (۲-۱۱۲) یعنی $\nabla.(\phi\vec{F})=(\nabla\phi).\vec{F}+\phi\nabla.\vec{F}$ داریم

$$\nabla.(\psi\nabla\phi)=(\nabla\psi).(\nabla\phi)+\psi\nabla.\nabla\phi=(\nabla\psi).(\nabla\phi)+\psi\nabla^2\phi$$

$$\nabla.(\phi\nabla\psi)=(\nabla\phi).(\nabla\psi)+\phi\nabla.\nabla\psi=(\nabla\psi).(\nabla\phi)+\phi\nabla^2\psi$$

بنابراین خواهیم داشت

$$\nabla.(\psi\nabla\phi)-\nabla.(\phi\nabla\psi)=\psi\nabla^2\phi-\phi\nabla^2\psi \tag{۲-۱۲۲}$$

در نهایت قضیهٔ گرین به صورت زیر اثبات می‌شود

$$\int_V(\psi\nabla^2\phi-\phi\nabla^2\psi)\,dv=\oint_s(\psi\nabla\phi-\phi\nabla\psi).\hat{n}da \tag{۲-۱۲۳}$$