به نام خدا

سیگنال‌ها و سیستم‌ها

مدرس: بهمن زنج

دانشکده فنی دانشگاه گیلان

Lecture-4

به نام خدا

سیگنال‌ها و سیستم‌ها

مدرس: بهمن زنج

دانشکده فنی دانشگاه گیلان

Lecture-6

به نام خدا

سیگنال‌ها و سیستم‌ها

مدرس: بهمن زنج

دانشکده فنی دانشگاه گیلان

Lecture-4

SIGNALS & SYSTEMS

Instructor: Bahman Zanj

The University Of Guilan

Lecture-4

سیستم‌های خطیِ تغییرناپذیر با زمان

LTI Systems

مقدمه

۱) چرا سیستم‌های خطی از قابلیت تحلیل بالایی برخوردار هستند ؟

اگر بتوان سیگنال ورودی x را بر حسب یک ترکیب خطی از سیگنال‌های پایه (x_1 و x_2 و ...) بیان کرد:

$$x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \cdots$$

و پاسخ سیستم خطی به این سیگنال‌های پایه را بدانیم (y_1 و y_2 و ...) ،
آنگاه به راحتی می‌توان پاسخ سیستم خطی به سیگنال ورودی x را تعیین کرد:

$$y = a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 + \cdots$$

مقدمه

۲) چرا سیستم‌های خطی مهم هستند ؟

۱. بسیار پرکاربرد هستند .

۲. بسیاری از سیستم‌های غیر خطی را می‌توان حول نقطهٔ کار با سیستمی خطی تقریب زد .

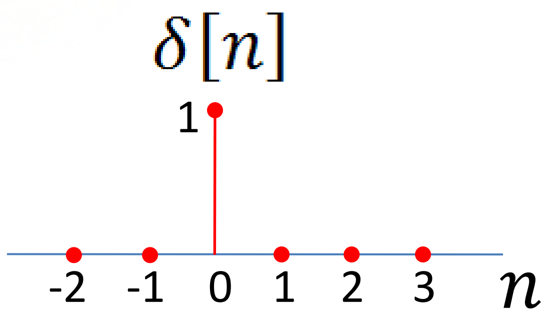
۳) انتخاب سیگنال‌های پایه باید بر اساس چه معیار یا معیارهایی صورت گیرد ؟

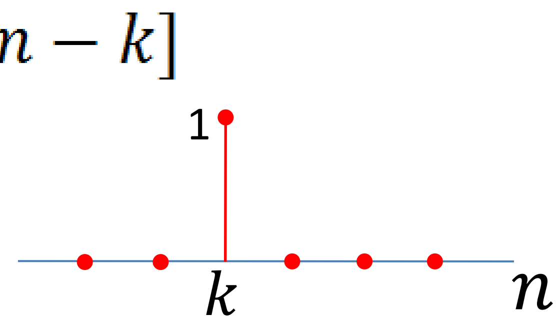
۱. بتوان با ترکیب خطی این سیگنال‌های پایه دسته وسیعی از سیگنال‌های ورودی را بیان کرد .

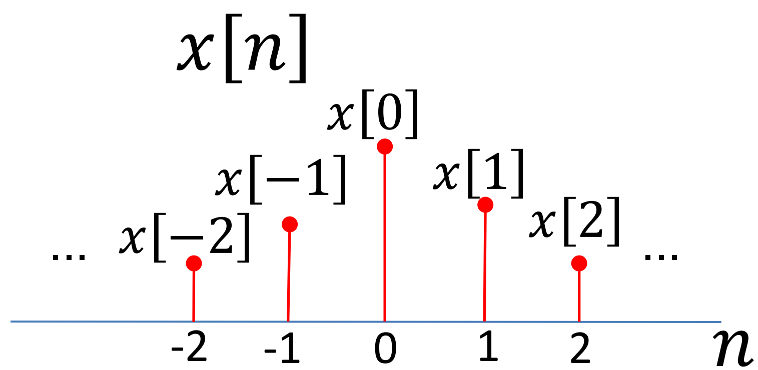
۲. پاسخ سیستم خطی به این سیگنال‌های پایه حتی الامکان ساده به‌دست آید .

*** سیگنال‌های پایه در این فصل ، ضربه و انتقال یافته‌های آن هستند.**

بیان سیگنال دلخواه $x[n]$ بر حسب ترکیبِ خطیِ ضربه و انتقال یافته‌های آن







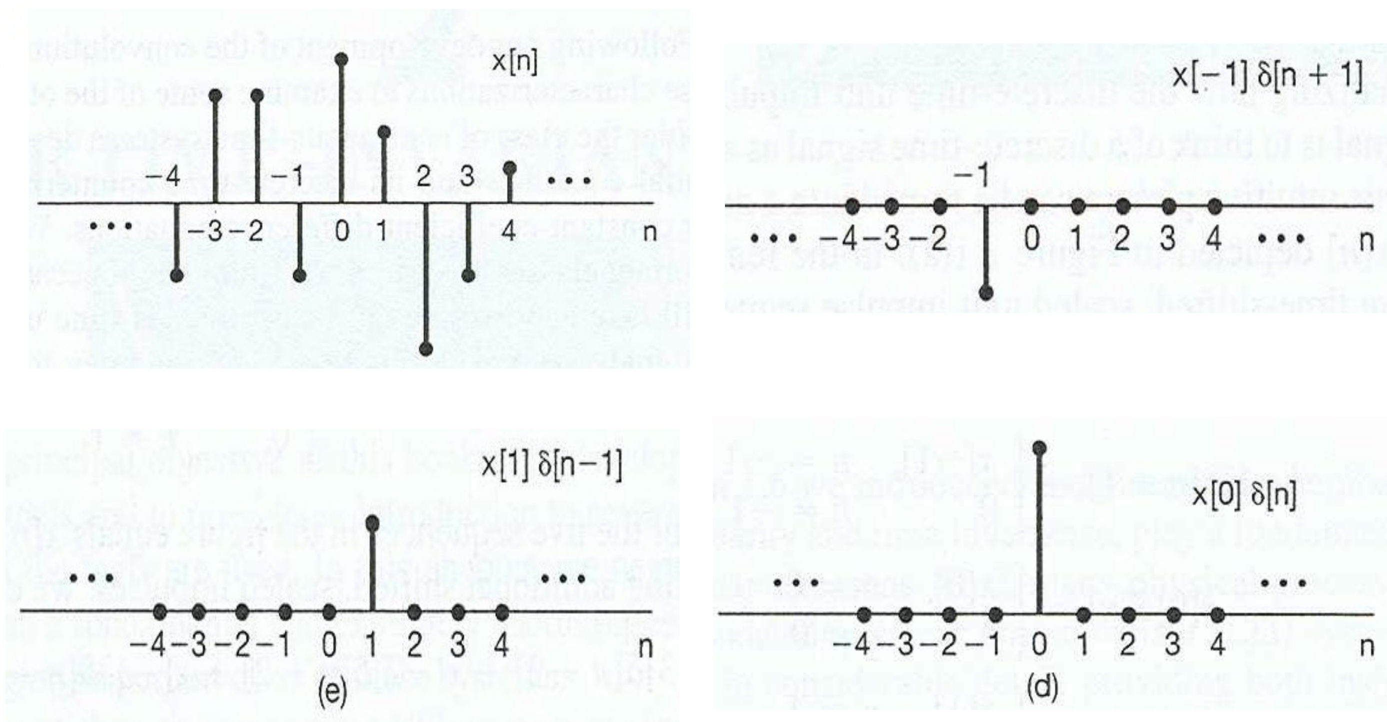
بیان سیگنال دلخواه $x[n]$ بر حسب ترکیبِ خطیِ ضربه و انتقال یافته‌های آن

$$x[-1]\delta[n+1]=\begin{cases} x[-1], & n=-1 \\ 0 \quad , & n\neq -1 \end{cases}$$

$$x[0]\delta[n]=\begin{cases} x[0], & n=0 \\ 0 \quad , & n\neq 0 \end{cases}$$

$$x[1]\delta[n-1]=\begin{cases} x[1], & n=1 \\ 0 \quad , & n\neq 1 \end{cases}$$

بیان سیگنال دلخواه $x[n]$ بر حسب ترکیبِ خطیِ ضربه و انتقال یافته‌های آن



$$x[n] = \cdots + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + \cdots$$

بیان سیگنال دلخواه $x[n]$ بر حسب ترکیبِ خطیِ ضربه و انتقال یافته‌های آن

$$x[n] = \cdots + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + \cdots$$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

پاسخ سیستمِ خطی به ورودی دلخواه $x[n]$

ابتدا فرض می‌کنیم پاسخ سیستمِ خطی را به $\delta[n-k]$ می‌دانیم:

$$\delta[n-k] \longrightarrow \boxed{\text{سیستم خطی}} \longrightarrow h_k[n]$$

$$\cdots \qquad\qquad \cdots$$

$$x[1]\,\delta[n-1] \qquad\qquad x[1]\,h_1[n]$$

$$x[0]\,\delta[n] \qquad\qquad x[0]\,h_0[n]$$

$$x[-1]\,\delta[n+1] \qquad\qquad x[-1]\,h_{-1}[n]$$

$$\cdots \qquad\qquad \cdots$$

$$x[n] = \cdots + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + \cdots$$

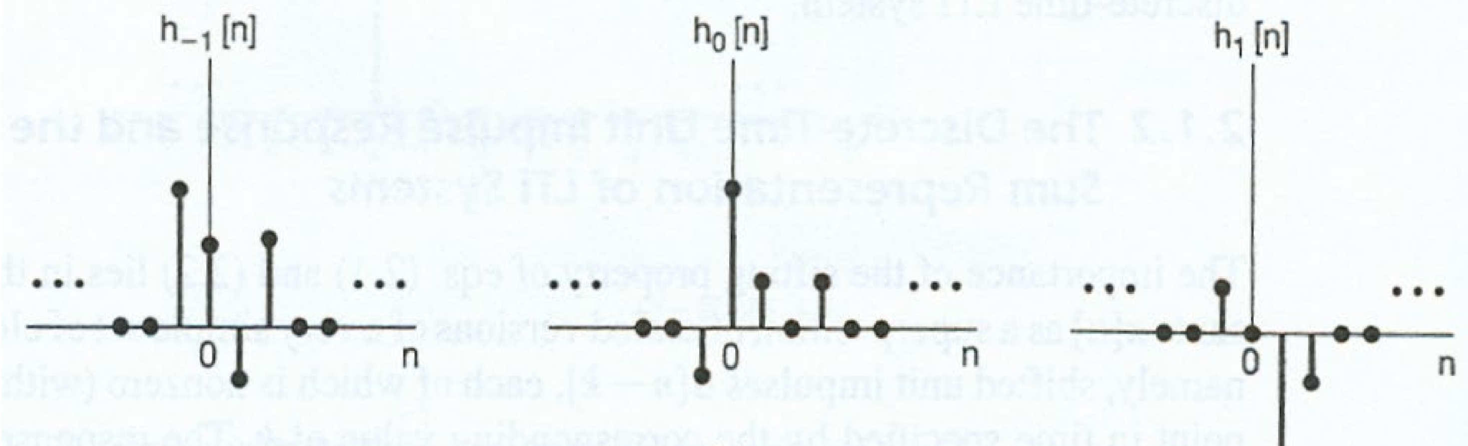
$$y[n] = \cdots + x[-1]h_{-1}[n] + x[0]h_0[n] + x[1]h_1[n] + \cdots$$

پاسخ سیستمِ خطی به ورودی دلخواه $x[n]$

$$\delta[n-k] \longrightarrow \boxed{\text{سیستم خطی}} \longrightarrow h_k[n]$$

به عنوان مثال فرض کنید پاسخ‌های زیر داده شده‌اند :

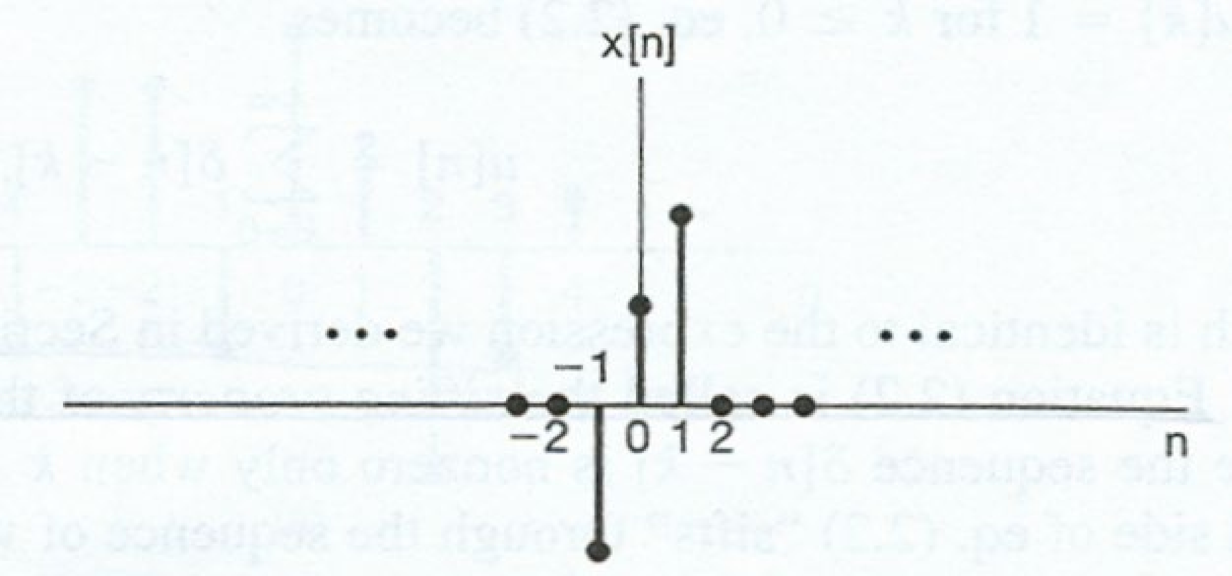
پاسخ به $\delta[n-1]$ پاسخ به $\delta[n]$ پاسخ به $\delta[n+1]$



(b)

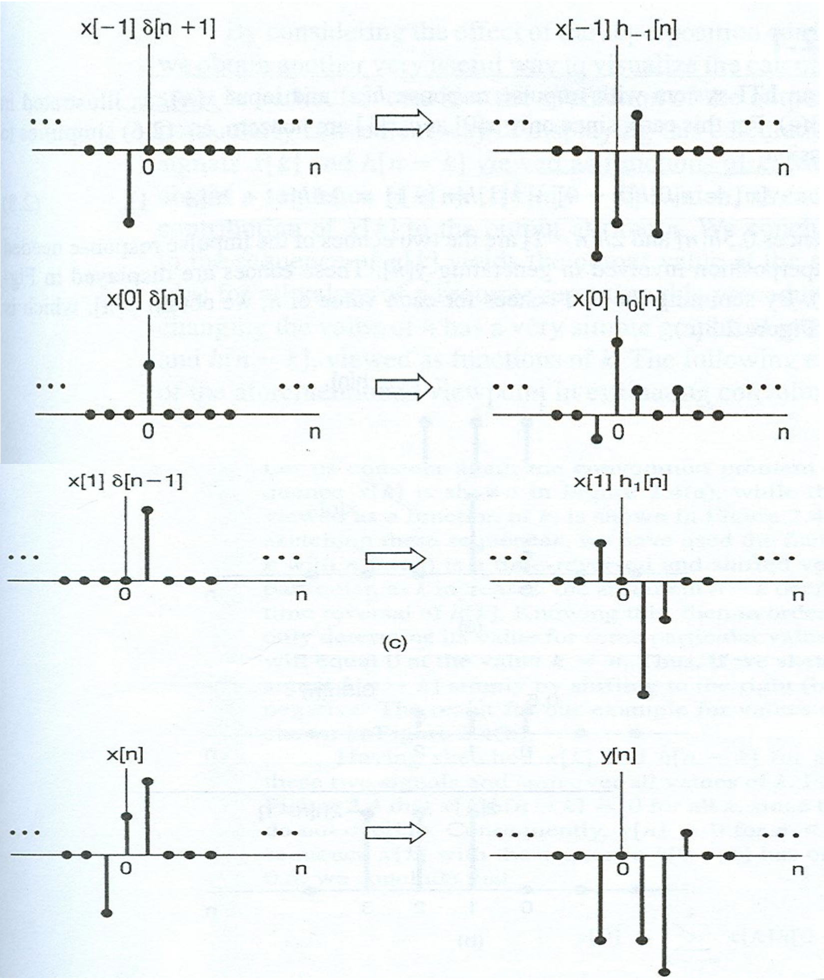
پاسخ سیستمِ خطی به ورودی دلخواه $x[n]$

حال اگر ورودیِ این سیستمِ خطی به صورت زیر باشد :



پاسخ سیستمِ خطیِ مفروض به ورودیِ فوق را می‌توان چنین به‌دست آورد (**جمع آثار**) :

پاسخ سیستمِ خطی به ورودی دلخواه $x[n]$



پاسخ سیستمِ خطی به ورودی دلخواه $x[n]$

بنابراین در حالت کلی می‌توان چنین نوشت :

$$\delta[n-k] \longrightarrow \boxed{\text{سیستم خطی}} \longrightarrow h_k[n]$$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h_k[n]$$

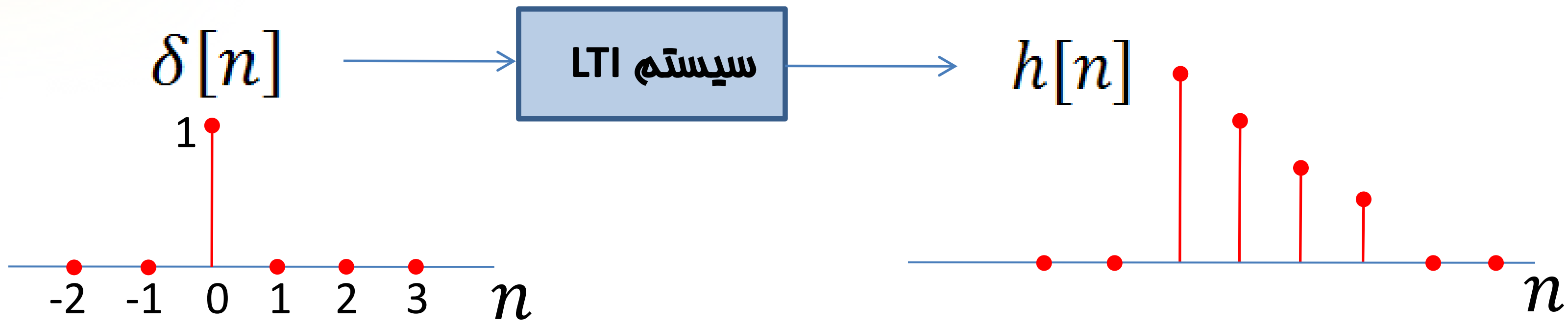
حال اگر سیستمِ **خطی** ، **TI** نیز باشد $\Longleftarrow$ $h_k[n] = h[n-k]$

در نتیجه خواهیم داشت :

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

یعنی: ...

پاسخ سیستمِ خطیِ تغییرناپذیر با زمان (LTI) به ورودی دلخواه $x[n]$



$x[n] \rightarrow$ سیستم LTI $\mathbf{h[n]}$ $\rightarrow$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

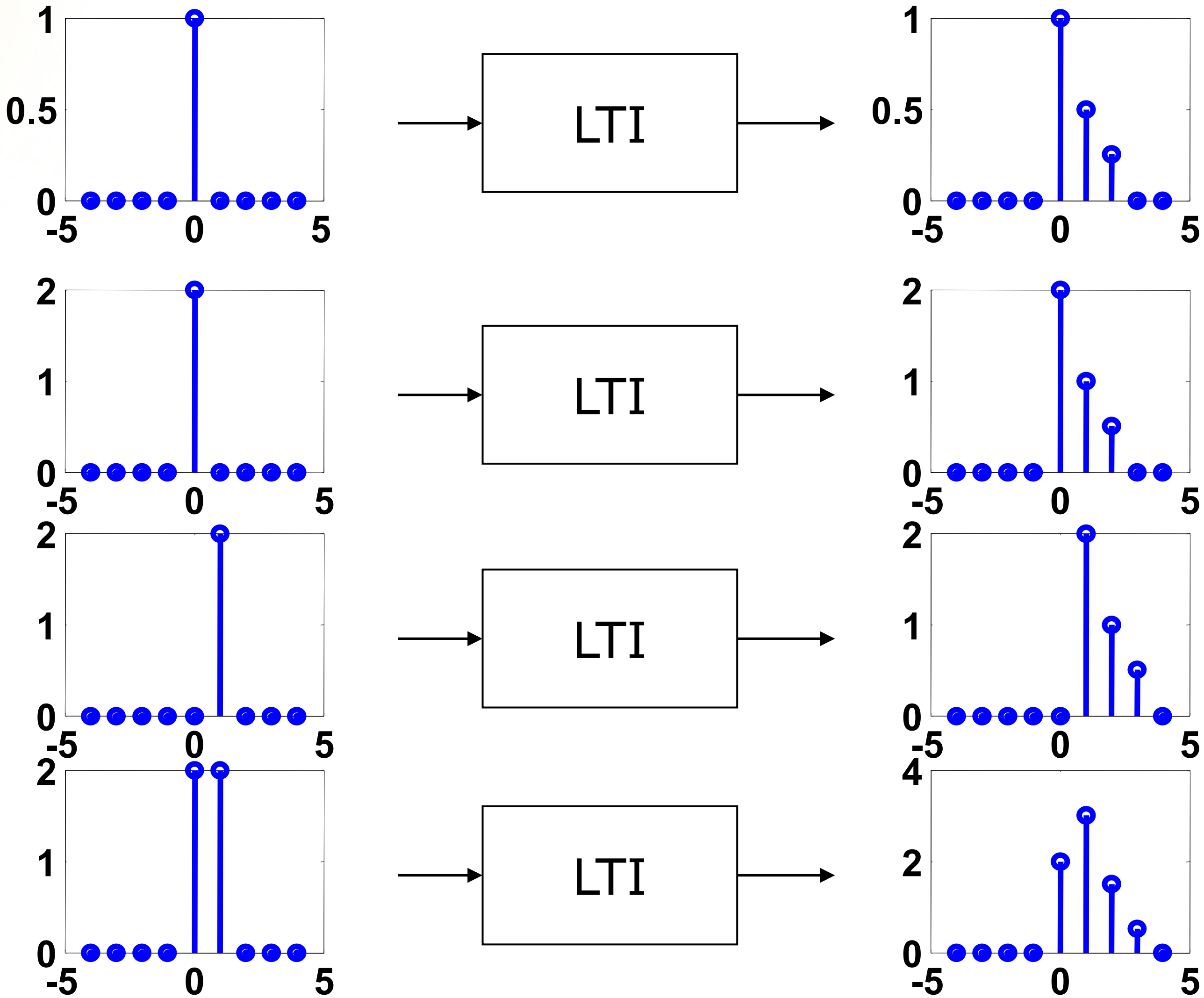
پاسخ سیستمِ خطیِ تغییرناپذیر با زمان (LTI) به ورودی دلخواه $x[n]$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

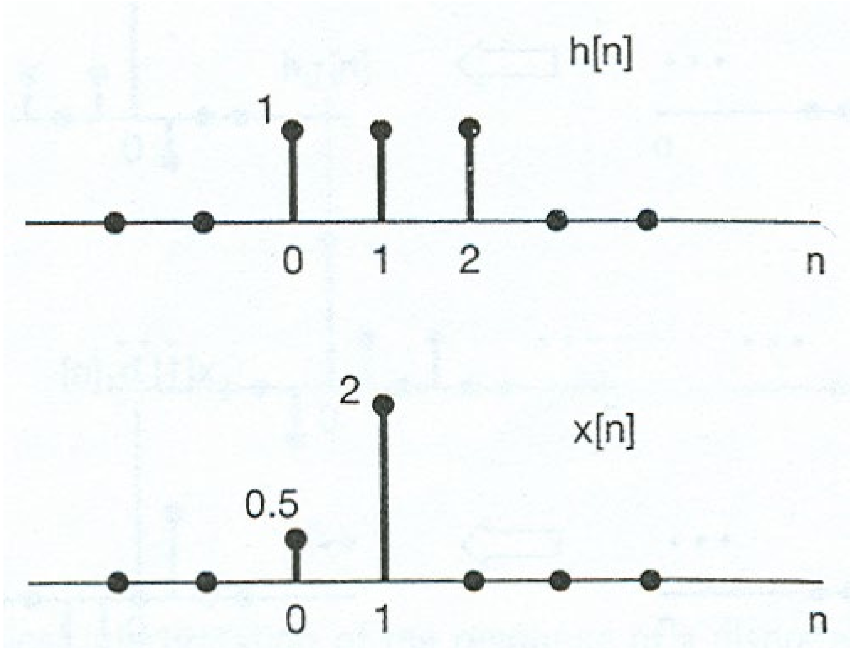
Convolution Sum

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

مثال :



مثالی دیگر :



بنا به :

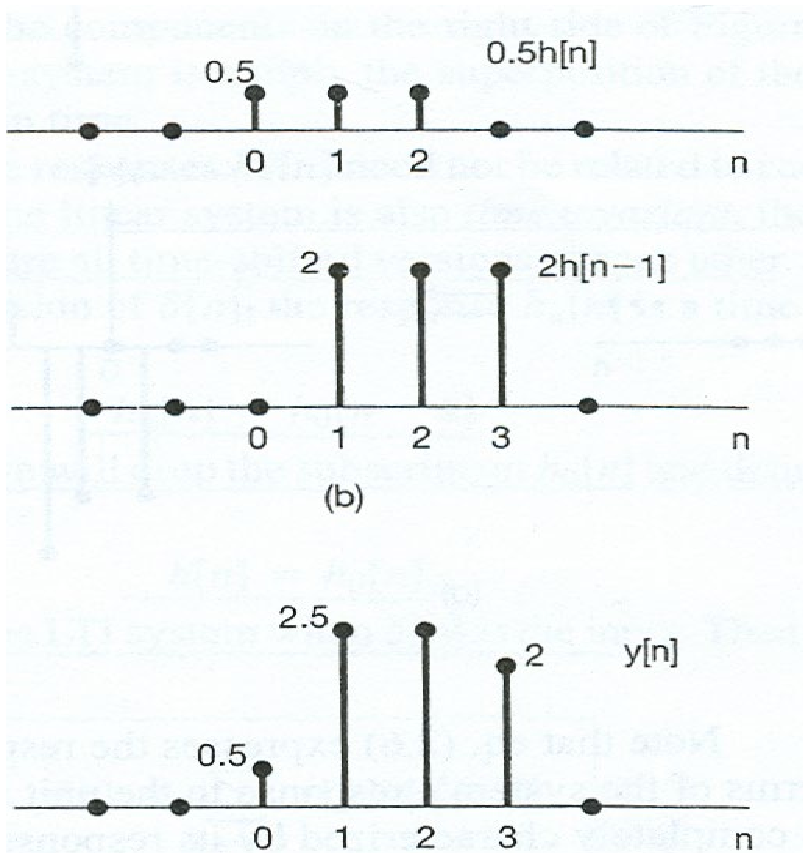
$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]$$

خواهیم داشت :

$$y[n]=x[0]h[n-0]+x[1]h[n-1]=0.5h[n]+2h[n-1]$$

ادامه مثال :

$$y[n] = 0.5h[n] + 2h[n-1]$$



سه خاصیت اساسی کانولوشن

۱) جابجایی پذیری (Commutative) :

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$$

❖ تعبیر سیستمیِ خاصیت جابجایی پذیری :

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] = x[n] * h[n]$$

$$h[n] \longrightarrow \boxed{x[n]} \longrightarrow y[n] = h[n] * x[n]$$

سه خاصیت اساسی کانولوشن

اثبات خاصیت جا بجایی پذیری :

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\underbrace{x[n-k]}_{\text{تغییر متغیر}}$$

$$n - k = k'$$

$$k \to n - k'$$

$$= \sum_{k'=-\infty}^{\infty} h[n-k']x[k']$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

$$= x[n] * h[n]$$

سه خاصیت اساسی کانولوشن

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

$$y[n] = \cdots + x[-2]h[n+2] + x[-1]h[n+1] + x[0]h[n] + x[1]h[n-1] + x[2]h[n-2] + \cdots$$

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

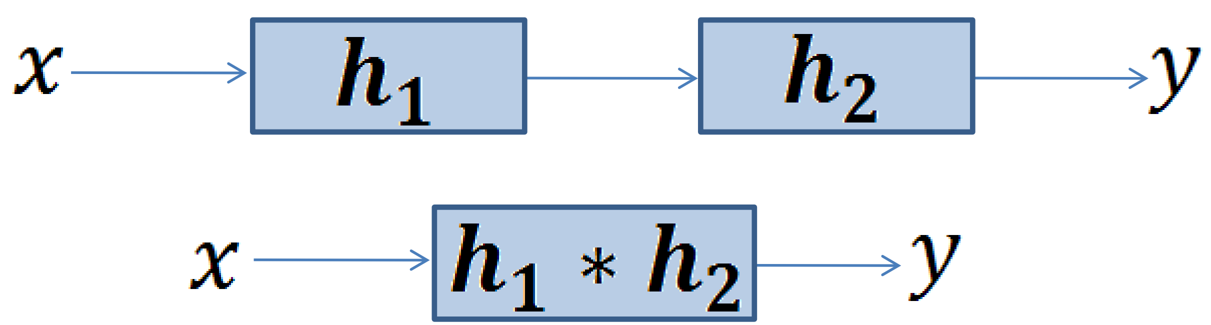
$$y[n] = \cdots + h[-2]x[n+2] + h[-1]x[n+1] + h[0]x[n] + h[1]x[n-1] + h[2]x[n-2] + \cdots$$

سه خاصیت اساسی کانولوشن

۲) شرکت پذیری (Associative) :

$$(x * h_1) * h_2 = x * (h_1 * h_2)$$

❖ تعبیر سیستمیِ خاصیت شرکت پذیری :



توجه : در سیستم‌های **زمان- پیوسته** (مانند **مدارهای الکتریکی LTI**) لزوماً این گونه نیست. [**چرا ؟**]

سه خاصیت اساسی کانولوشن

با توجه به خاصیت جابجایی پذیریِ کانولوشن، می‌توان نوشت:

$$h_1 * h_2 = h_2 * h_1$$

تعبیر سیستمیِ رابطه فوق (امکانِ تعویضِ ترتیبِ سیستم‌های **LTI متوالی شده**):

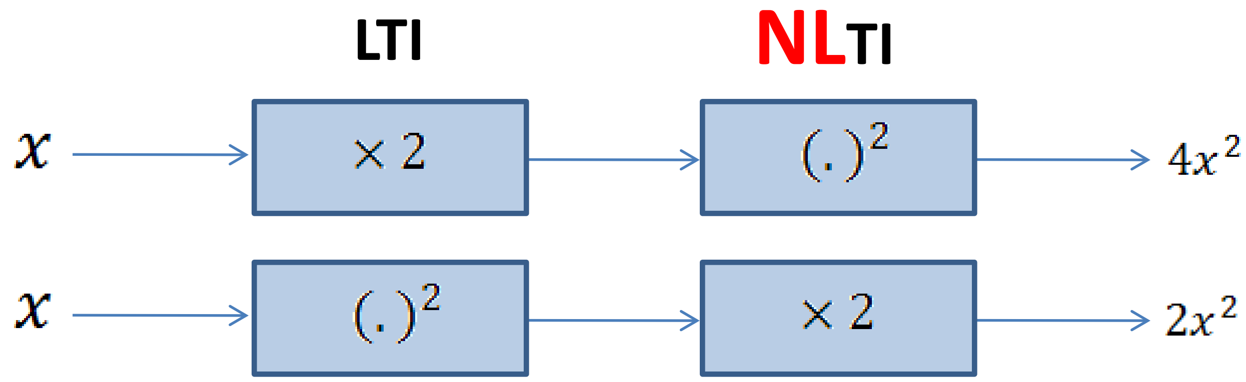
$$x \longrightarrow \boxed{h_1} \longrightarrow \boxed{h_2} \longrightarrow y$$

$$x \longrightarrow \boxed{h_2} \longrightarrow \boxed{h_1} \longrightarrow y$$

این ویژگی فقط برای سیستم های **LTI** معتبر است.

سه خاصیت اساسی کانولوشن

به مثال سادهٔ زیر توجه کنید :

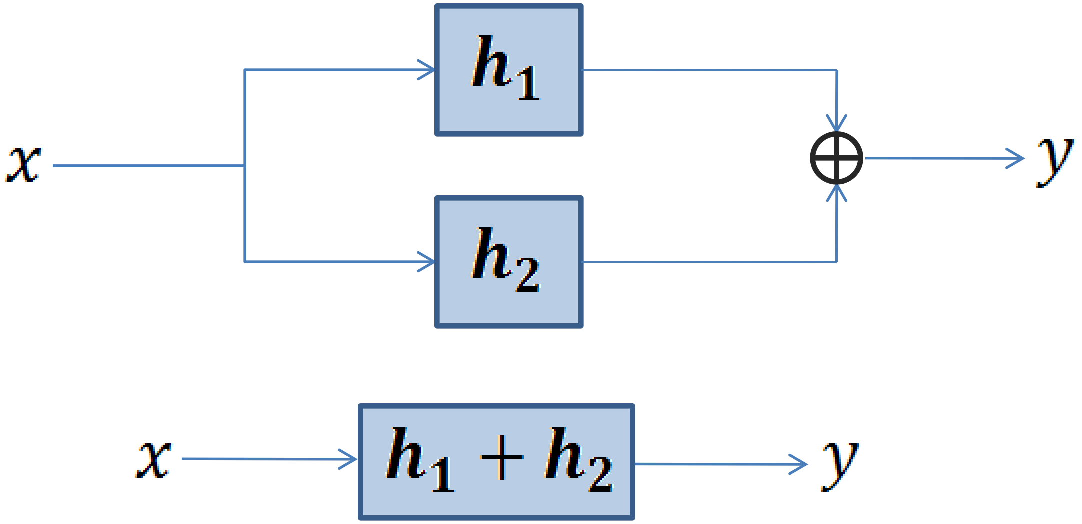


سه خاصیت اساسی کانولوشن

۳) توزیع پذیری (Distributive) :

$$x * (h_1 + h_2) = x * h_1 + x * h_2$$

❖ تعبیر سیستمیِ خاصیت توزیع پذیری :



توجه:

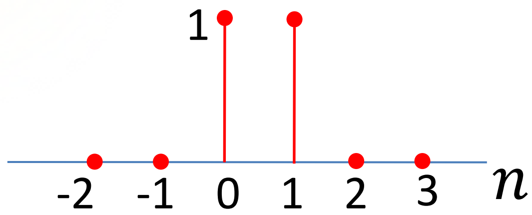
* **فقط** سیستم **LTI** است که با پاسخ ضربه‌اش **به طور یکتا** مشخص می‌شود.

- با توجه به نکتهٔ فوق، قاعدتاً باید بتوان از روی پاسخ ضربهٔ یک سیستم LTI چهار خاصیتِ اساسیِ دیگرِ سیستم‌ها را برای آن سیستم LTI تعیین کرد.

مثال:

سیستمی با پاسخ ضربه‌ی مقابل در نظر بگیرید:

$$h[n] = \delta[n] + \delta[n-1]$$



آیا این سیستم LTI است؟...

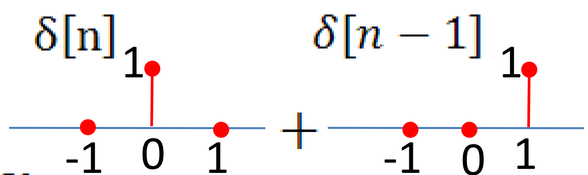
سوال درست نیست، زیرا از روی پاسخ ضربه نمی توان به نوع سیستم پی برد .

اما اگر گفته می‌شد سیستمی LTI با پاسخ ضربهٔ فوق مفروض است، در این صورت فقط یک سیستم LTI با این پاسخ ضربه وجود دارد:

$$y[n] = x[n] + x[n-1]$$

در صورتی که قید LTI را از روی سیستم برداریم، سیستم های غیر خطی مختلفی را می توان مطرح کرد که همین پاسخ ضربه را داشته باشند. به عنوان مثال:

1) $y[n] = (x[n] + x[n-1])^2$

$h[n] = ($  $)^2$

2) $y[n] = \max\{x[n], x[n-1]\}$

(ابتدا نشان دهید که این سیستم غیرخطی است، و سپس نشان دهید که پاسخ ضربهٔ این سیستم هم به صورت فوق است.)