(۲-۳۱) (المان سمت الرأس[6]) $$\mathrm{r}d\theta = \mathrm{r}\lim_{\Delta\theta\to 0}\Delta\theta \qquad \mathrm{r}\Delta\theta = \mathrm{r}\left(\theta_2-\theta_1\right)$$

II- المان‌های سطحی:

$$ds_r = \lim_{\Delta\varphi,\Delta\theta\to 0}\left(\mathrm{r}\sin\theta\Delta\varphi\right)\left(\mathrm{r}\Delta\theta\right)$$

(۲-۳۲) $$= \mathrm{r}^2\sin\theta d\theta d\varphi$$

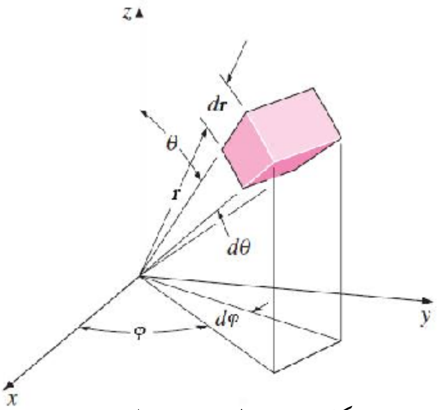
(۲-۳۳) $$ds_\varphi = \lim_{\Delta \mathrm{r},\Delta\theta\to 0}\Delta \mathrm{r}\left(\mathrm{r}\Delta\theta\right) = \mathrm{r}d\mathrm{r}d\theta$$

$$ds_\theta = \lim_{\Delta \mathrm{r},\Delta\varphi\to 0}\Delta \mathrm{r}\left(\mathrm{r}\sin\theta\Delta\varphi\right)$$

(۲-۳۴) $$= \mathrm{r}\sin\theta d\mathrm{r}d\varphi$$

III- المان حجمی:

(۲-۳۵) $$dv = \mathrm{r}^2\sin\theta d\mathrm{r}d\theta d\varphi$$



شکل ۲-۱۰- المان‌های سطحی و حجمی در مختصات کروی

۲-٤- جبر برداری:

بررسی جبر برداری را با برخی گزاره‌های صوری مربوط به بردارها شروع می‌کنیم. در این راستا تعاریف را ابتدا در مختصات دکارتی تعریف نموده و سپس به مختصات‌های استوانه‌ای و کروی تعمیم می‌دهیم.

۲-٤-۱- تساوی بردارها:

(۲-۳۶) $$\vec{A} = \vec{B}$$

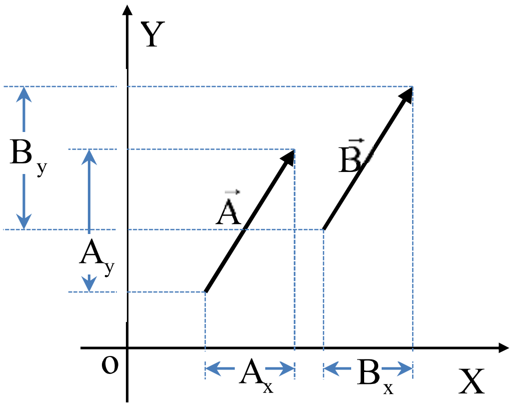
یا

$$(A_x, A_y, A_z) = (B_x, B_y, B_z)$$

معادل سه معادلهٔ زیر است:

$$A_x = B_x,\quad A_y = B_y,\quad A_z = B_z$$

یعنی، **دو بردار مساوی‌اند، اگر و فقط اگر، مؤلفه‌های آن‌ها به ترتیب با هم مساوی باشند.**



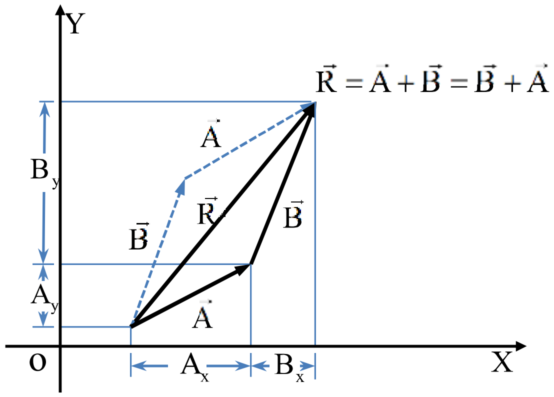
شکل ۲-۱۱- نمایش بردارهای مساوی

[6] zenith angle

۲-٤-۲- جمع برداری:

جمع دو بردار به کمک معادلهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$\vec{A}+\vec{B}=\left(A_x,A_y,A_z\right)+\left(B_x,B_y,B_z\right)=\left(A_x+B_x,A_y+B_y,A_z+B_z\right) \tag{۲-۳۷}$$



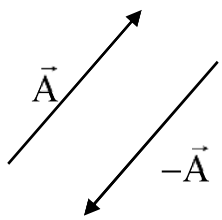
شکل ۲-۱۲- جمع دو بردار

مجموع دو بردار عبارت است از برداری که مؤلفه‌هایش مجموع مؤلفه‌های آن بردارها باشد.

۲-٤-۳- ضرب عدد در بردار:

اگر c یک کمیت عددی و **A** یک کمیت برداری باشد، آنگاه خواهیم داشت

$$c\vec{A}=c\left(A_x,A_y,A_z\right)=\left(cA_x,cA_y,cA_z\right)=\vec{A}c \tag{۲-۳۸}$$



شکل ۲-۱۳- نمایش بردار قرینه

۲-٤-٤- تفریق برداری:

بنابر تعریف، تفریق عبارت است از

$$\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})=\left(A_x-B_x,A_y-B_y,A_z-B_z\right) \tag{۲-۳۹}$$

۲-٤-٥- بردار صفر:

بردار $\vec{o}=\left(0,0,0\right)$ را بردار صفر می‌نامند. جهت بردار صفر تعریف نشده (نامشخص) است.

۲-٤-٦- قانون‌های حاکم در جمع:

این قانون درباره بردارها صادق است، یعنی

قانون جابه‌جایی	$\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$	(۲-۴۰)
قانون شرکت پذیری	$\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})=(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}$	(۲-۴۱)
قانون توزیع پذیری	$c(\vec{A}+\vec{B})=c\vec{A}+c\vec{B}$	(۲-۴۲)

۲-٤-۷- بزرگی بردار:

بزرگی بردار $\vec{A}$، که با نماد $|A|$ یا با A نمایش داده می‌شود، بنابر تعریف، عبارت است از

(۴۳-۲)	$A=\|\vec{A}\|=\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}$	(مختصات دکارتی)
(۴۴-۲)	$A=\|\vec{A}\|=\sqrt{\rho^2+z^2}$	(مختصات استوانه‌ای)
(۴۵-۲)	$A=\|\vec{A}\|=r$	(مختصات کروی)

۲-٤-۸- بردار یکه:

بردار یکه برداری است به اندازه یک واحد که می‌تواند راستای بردار مورد نظر را معین کنـد. بردارهـای یکـه را اغلب با نماد e ، مخفف واژه آلمانی Einhent به معنی مقیاس، نمایش می‌دهند. سه بـردار یکـه در دسـتگاه‌های مختصات عبارتند از

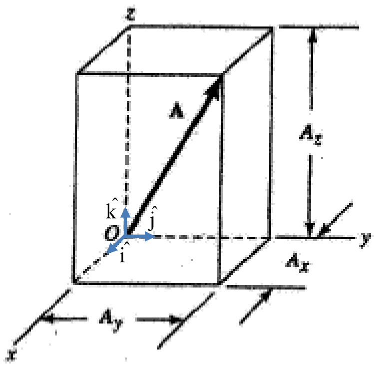
(۴۶-۲)	$e_x=(1,0,0)\quad e_y=(0,1,0)\quad e_z=(0,0,1)$	(مختصات دکارتی)
(۴۷-۲)	$e_\rho=(1,0,0)\quad e_\varphi=(0,1,0)\quad e_z=(0,0,1)$	(مختصات استوانه‌ای)
(۴۸-۲)	$e_r=(1,0,0)\quad e_\theta=(0,1,0)\quad e_\varphi=(0,0,1)$	(مختصات کروی)

بردار یکه در مختصات دکارتی به صورت زیر هم نمایش داده می‌شود.

$$e_x=\hat{i}\quad e_y=\hat{j}\quad e_z=\hat{k} \tag{۴۹-۲}$$

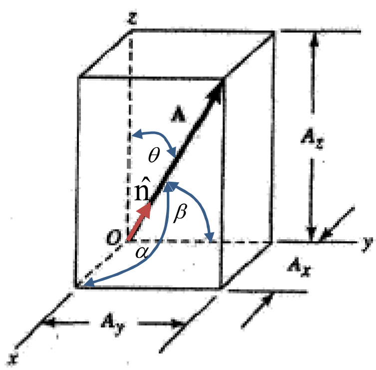
بـر ایـن اسـاس بـردار **A** را در مختصـات دکـارتی مـی‌تـوان بـه صورت زیر خلاصه نویسی کرد.

$$\vec{A}=A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k} \tag{۵۰-۲}$$



شکل ۲-۱۴- نمایش بردارهای یکه در مختصات دکارتی

هرگاه زاویه فضایی بردار با محور x را α، با محور y را β و با محور z را θ بنامیم؛ بردار یکهٔ در راستای بردار A عبارت است از



شکل ۲–۱۵– نمایش بردار یکه فضایی در مختصات دکارتی

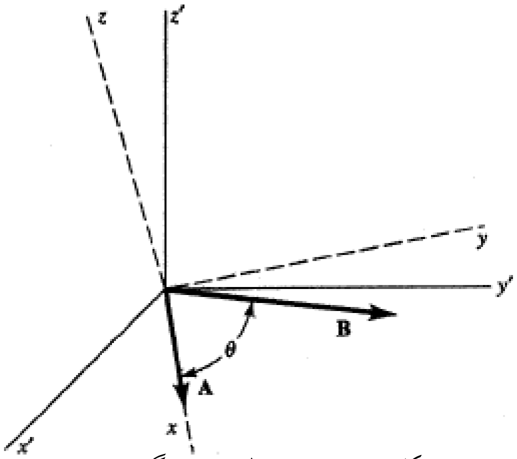
$$\hat{n} = \frac{\vec{A}}{A} = \cos\alpha\hat{i} + \cos\beta\hat{j} + \cos\theta\hat{k} \qquad (۵۱–۲)$$

۲–٤–۹– ضرب داخلی دو بردار:

برای دو بردار مفروض $\vec{A}$ و $\vec{B}$ حاصل‌ضرب داخلی یا نقطه‌ای $\vec{A}\cdot\vec{B}$ عبارت است از کمیتی عددی به شکل زیر

$$\vec{A}.\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \qquad (۵۲–۲)$$

هرگاه زاویهٔ بین دو بردار فوق را θ بنامیم از دیدگاه هندسی حاصل‌ضرب داخلی دو بردار عبارت است از



شکل ۲–۱۶– ضرب نقطه‌ای از دیدگاه هندسی

$$\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta \qquad (۵۳–۲)$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{AB} \qquad (۵۴–۲)$$

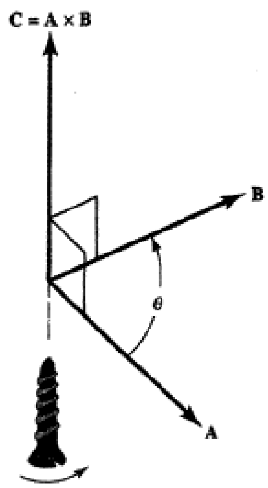
علاوه براین حاصل‌ضرب داخلی دارای خواص زیر است

$$\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A} \qquad (۵۵–۲)$$ خاصیت جابه‌جایی

$$\vec{A}.(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}.\vec{B} + \vec{A}.\vec{C} \qquad (۵۶–۲)$$ خاصیت توزیع پذیری

۲–٤–۱۰– ضرب خارجی دو بردار:

برای دو بردار مفروض $\vec{A}$ و $\vec{B}$ حاصل‌ضرب خارجی یا برداری $\vec{A}\times\vec{B}$ کمیتی برداری است که عبارت است از



شکل ۲–۱۶– ضرب خارجی از دیدگاه هندسی

$$\vec{C} = \vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \qquad (۵۷–۲)$$

هرگاه زاویهٔ بین دو بردار فوق را θ بنامیم از دیدگاه هندسی حاصل‌ضرب داخلی دو بردار عبارت است از

$$C = \left|\vec{A}\times\vec{B}\right| = AB\sin\theta \qquad (۲-۵۸)$$

علاوه براین حاصل‌ضرب خارجی دارای خواص زیر است

$$\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A} \qquad (۲-۵۹)$$
خاصیت پادجابه‌جایی

$$\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C} \qquad (۲-۶۰)$$
خاصیت توزیع پذیری

۲-٤-۱۱- حاصل ضرب سه گانه:

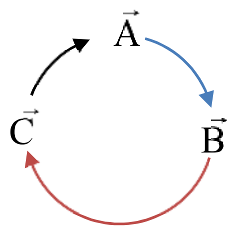
هرگاه در دستگاه دکارتی سه بردار مفروض $\vec{A}$، $\vec{B}$ و $\vec{C}$ داشته باشیم و بخواهیم ترکیبات دو ضرب داخلی و خارجی را بر آن اثر دهیم دو حالت از چهار حالت ممکن دارای مفهوم خواهد بود:

$$\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \qquad (۲-۶۱)$$
سه گانه نرده‌ای

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}.\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}.\vec{B}) = \vec{D} \qquad (۲-۶۲)$$
سه گانه برداری

نکته: در ضرب سه‌گانه نرده‌ای جایگشت‌ها از چرخش شکل (۲-۱۷) طبعیت می‌کنند یعنی،

$$\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}.(\vec{C}\times\vec{A}) = \vec{C}.(\vec{A}\times\vec{B}) \qquad (۲-۶۳)$$



شکل ۲-۱۷- جهت چرخش جایگشتی بدون تغییر

۲-۵- شیب و گرادیان:

مفهوم شیب در ریاضیات به نتایج حاصل از مشتق و انتگرال گیری یعنی حساب دیفرانسیل و انتگرال برداری ختم می‌شود. ساده‌ترین تعمیم، رابطه میان یک **میدان برداری** خاص و مشتق‌های یک یک **میدان عددی** است.

حال اگر میدان عددی، تابعی از مکان در مختصات دکارتی فرض شود، یعنی

$$\phi \doteq \phi(x, y, z) \qquad (۲-۶۱)$$

و دیفرانسیل بردار مکان به صورت زیر باشد

$$d\vec{s} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k} \qquad (۲-۶۲)$$