به نام خدا

سیگنال‌ها و سیستم‌ها

مدرس: بهمن زنج

دانشکده فنی دانشگاه گیلان

Lecture-5

SIGNALS
&
SYSTEMS

Instructor: Bahman Zanj

The University Of Guilan

Lecture-5

سیستم‌های خطیِ تغییرناپذیر با زمان

LTI systems

با توجه به توصیف یکتای سیستم LTI توسط پاسخ ضربهٔ آن،

قاعدتاً باید بتوان

از روی پاسخ ضربهٔ یک سیستم LTI،

چهار خاصیتِ اساسیِ دیگرِ آن سیستم LTI را تعیین کرد؛ یعنی:

بی حافظه بودن
علّی بودن
پایدار بودن
معکوس پذیر بودن

$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\delta[n-k]$$

$$y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]$$

$$y[n]=\cdots+x[-2]h[n+2]+x[-1]h[n+1]+x[0]h[n]+x[1]h[n-1]+x[2]h[n-2]\ +\cdots$$

$$y[n]=h[n]*x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]x[n-k]$$

$$y[n]=\cdots+h[-2]x[n+2]+h[-1]x[n+1]+h[0]x[n]+h[1]x[n-1]+h[2]x[n-2]+\cdots$$

قید روی پاسخ ضربهٔ سیستم

۱. سیستم LTI بی حافظه است.	$\Longleftrightarrow$	$h[n] = A\delta[n]$	$h(t) = A\delta(t)$
۲. سیستم LTI علّی است.	$\Longleftrightarrow$	$h[n] = 0 \; for \; n < 0$	$h(t) = 0 \; for \; t < 0$
۳. سیستم LTI پایدار است.	لزوم شرط / کفایت شرط $\Longleftrightarrow$	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lvert h[n] \rvert < \infty$	$\int_{-\infty}^{\infty} \lvert h(t) \rvert dt < \infty$

❑ برای اثبات "کفایت" شرط پایداری سیستم‌های LTI، فرض می کنیم که شرط مذکور برقرار می باشد و ورودی هم کران‌دار (Bounded) باشد؛ یعنی:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

$$|x[n]| \le B_x < \infty \ ,\forall n \xrightarrow{\text{باید نشان دهیم}} |y[n]| \le B_y < \infty \ ,\forall n$$

رابطه‌ی ورودی-خروجی سیستم‌های LTI :

$$\boldsymbol{y[n] = \cdots + h[-2]x[n+2] + h[-1]x[n+1] + h[0]x[n] + h[1]x[n-1] + h[2]x[n-2] + \cdots}$$

با توجه به این که:

$$|a+b| \le |a| + |b| \qquad \& \qquad |a.b| = |a|.|b|$$

می‌توان چنین نتیجه گرفت: ...

قید روی پاسخ ضربهٔ سیستم

۴. سیستم LTI معکوس پذیر است. ⟺ ؟

تنها سیستم LTI بی حافظه :

$$y(t) = Ax(t) \quad \rightarrow \quad h(t) = A\delta(t)$$
$$y[n] = Ax(n) \quad \rightarrow \quad h[n] = A\delta[n]$$

به ازای $A = 1$ داریم :

$$y(t) = x(t) \quad \rightarrow \quad h(t) = \delta(t)$$

$$y[n] = x[n] \quad \rightarrow \quad h[n] = \delta[n]$$

که چنین سیستمی را اصطلاحاً **سیستم همانی** (**Identity System**) می‌نامند.

با توجه به رابطهٔ کلی ورودی-خروجی برای **هر** سیستم LTI، خواهیم داشت:

$$\boldsymbol{y(t) = x(t) * h(t)}$$
$$\boxed{\boldsymbol{x(t) = x(t) * \delta(t)}}$$

$$\boldsymbol{y[n] = x[n] * h[n]}$$
$$\boxed{\boldsymbol{x[n] = x[n] * \delta[n]}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{x(t-t_0) = x(t) * \delta(t-t_0)}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{x[n-n_0] = x[n] * \delta[n-n_0]}}$$

- ابتدا نشان دهید که اگر یک سیستم LTI معکوس پذیر باشد، آنگاه Inverse System آن نیز سیستمی LTI است.

بنابراین دیاگرام بلوکی زیر را داریم:

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \xrightarrow{y[n]} \boxed{h_1[n]} \longrightarrow z[n] = x[n]$$

System — Inverse System

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n] * h_1[n] = \delta[n]} \longrightarrow x[n]$$

مثال: با سیستم انباشتگر به عنوان یک سیستم LTI در فصل اول آشنا شدیم.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \xrightarrow{\text{پاسخ ضربه}} \boxed{h[n] = u[n]}$$

- Inverse System?… $\boxed{z[n] = y[n] - y[n-1]}$
- Impulse Response of the Inverse System?… $\boxed{h_1[n] = \delta[n] - \delta[n-1]}$

❖ در ادامه نشان می‌دهیم که رابطهٔ زیر برقرار است :

$$h[n] * h_1[n] = \delta[n]$$

داریم:

$$\begin{aligned} h[n] * h_1[n] &= u[n] * (\delta[n] - \delta[n-1]) \\ &= u[n] * \delta[n] - u[n] * \delta[n-1] \\ &= u[n] - u[n-1] \\ &= \delta[n] \end{aligned}$$

مثال: چهار خاصیت دیگر یک سیستم LTI با پاسخ ضربهٔ زیر را مشخص کنید.

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

۱- با حافظه ؟ ...

۲- علّی ؟ ...

۳- پایدار ؟ ...

۴- معکوس پذیر ؟ ...

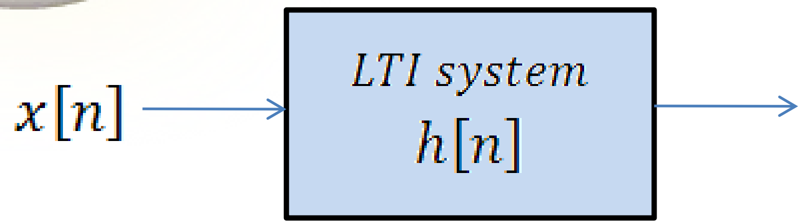
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 < \infty$$

نکته: فرم کلی رابطهٔ ورودی-خروجیِ سیستم‌های LTV بی حافظه ... ؟

$$y(t) = A(t)x(t)$$

$$y[n] = A[n]x(n)$$

نحوه محاسبه ی **convolution sum** برای x و h داده شده:



$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,h[n-k]$$

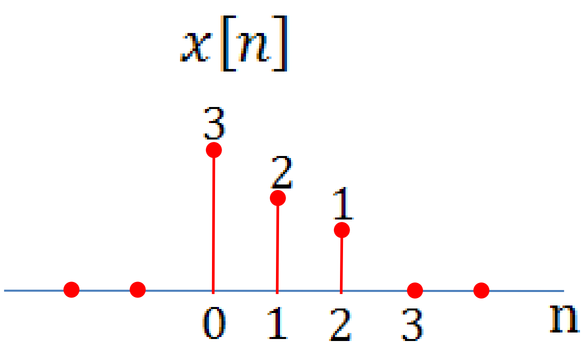
$$= h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

* نگرش اول:

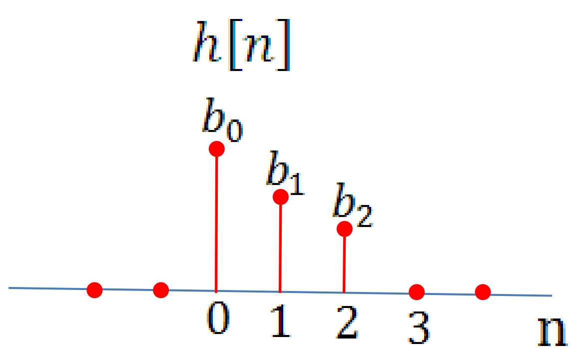
$$y[n] = \cdots + x[0]h[n] + x[1]h[n-1] + x[2]h[n-2] + \cdots$$

$$= \cdots + h[0]x[n] + h[1]x[n-1] + h[2]x[n-2] + \cdots$$

مثال:

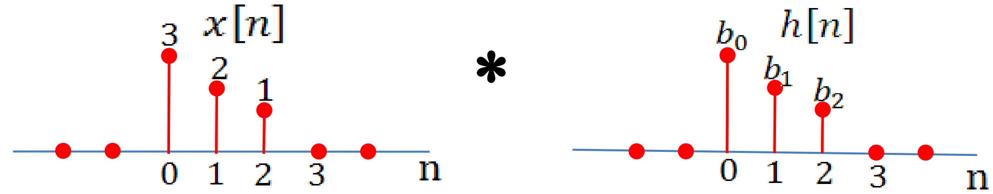


$*$

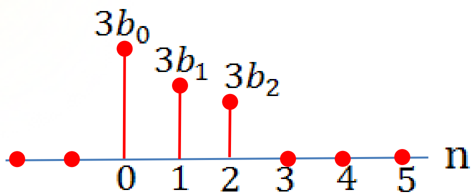


$= \ ?$

$$y[n] = \cdots + x[0]h[n] + x[1]h[n-1] + x[2]h[n-2] + \cdots$$

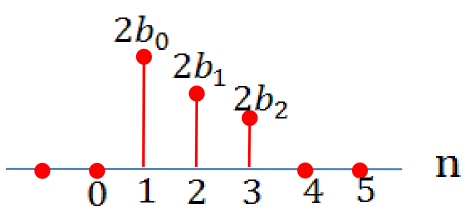


$$x[0]h[n] = 3h[n]$$



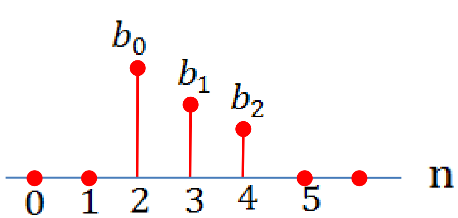
$\oplus$

$$x[1]h[n-1] = 2h[n-1]$$

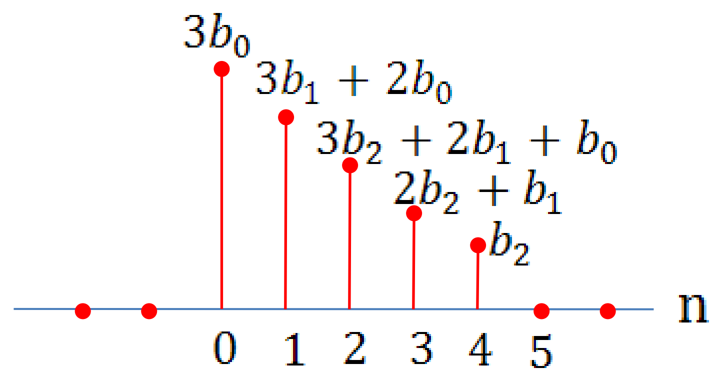


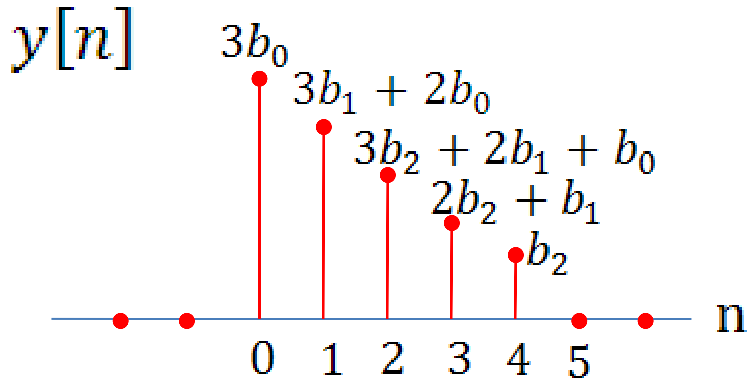
$\oplus$

$$x[2]h[n-2] = h[n-2]$$

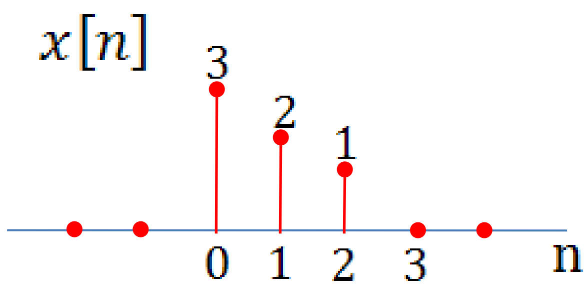


$y[n]$

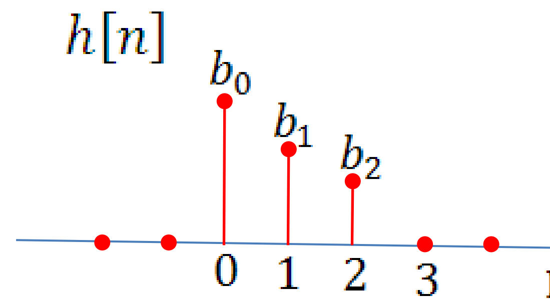




=



*



و چنین خوانده می‌شود :

“y” equals “x” **convolved** with “h” or “x” is **filtered** by “h”

توجه :

حاصل کانولوشن دنباله‌ای به طول N_1 با دنباله‌ای به طول N_2 برابر است با دنباله‌ای به طولِ ...؟

$$\boxed{N_1+N_2-1}$$

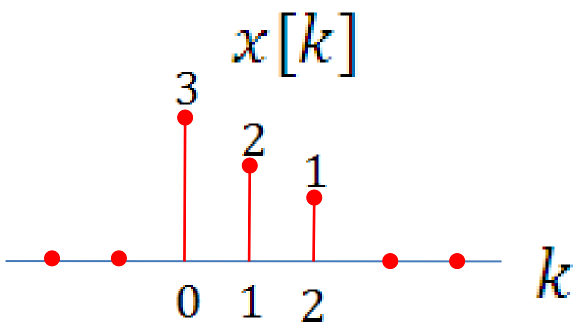
* نگرش دوم:

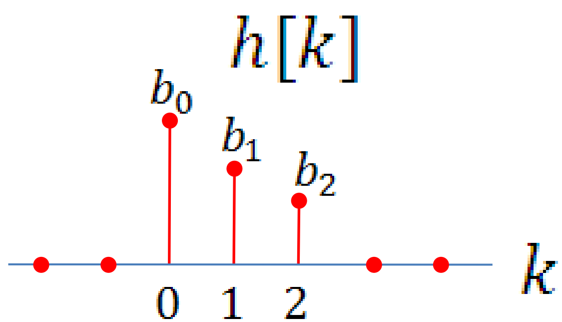
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{x[k]\,h[n-k]}_{\boxed{g_n[k]}}$$

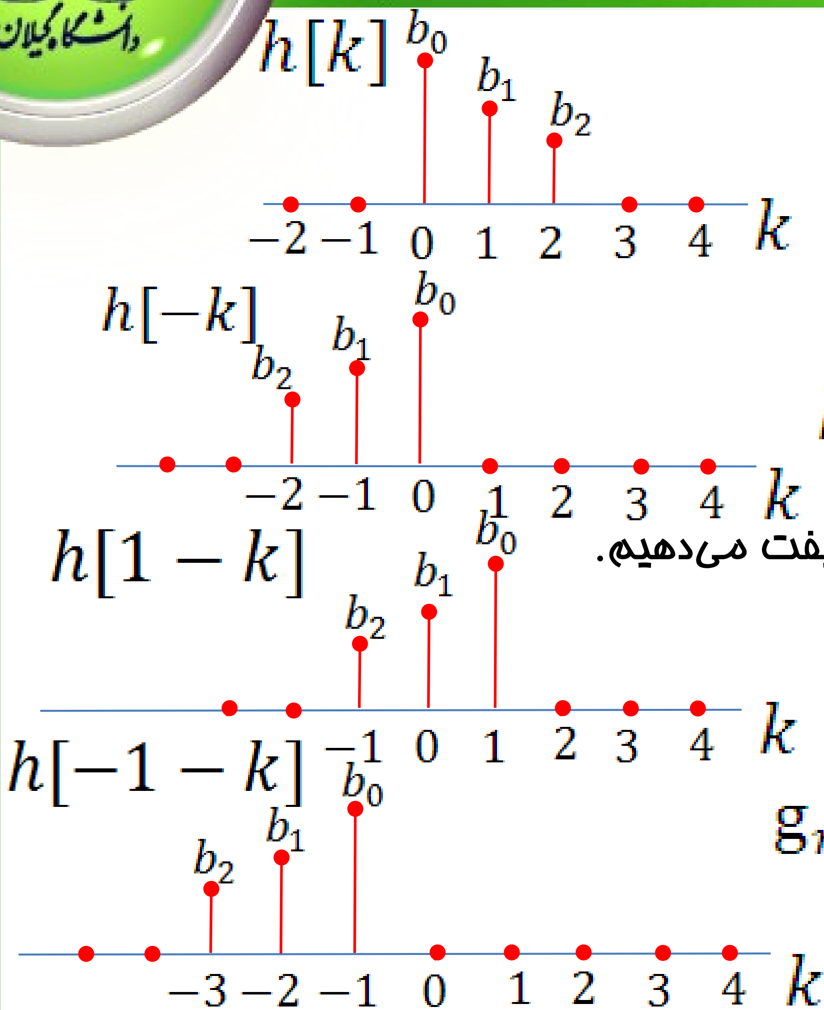
In $g_n[k]$, k is the independent variable & n is treated as a constant (parameter).

❖ مراحل انجام کانولوشن با این نگرش :

۱) $k \leftarrow n$: $x[k] \leftarrow x[n] \;,\; h[k] \leftarrow h[n]$







۲) Time-Reversal : $h[-k] \leftarrow h[k]$

۳) Time-Shift : $h[n-k] \leftarrow h[-k]$

❑ برای $n>0$ ، $h[-k]$ را n تا به سمت راست شیفت می‌دهیم.

* به عنوان مثال، به ازای $n=1$ داریم:

* و به ازای $n=-1$ داریم:

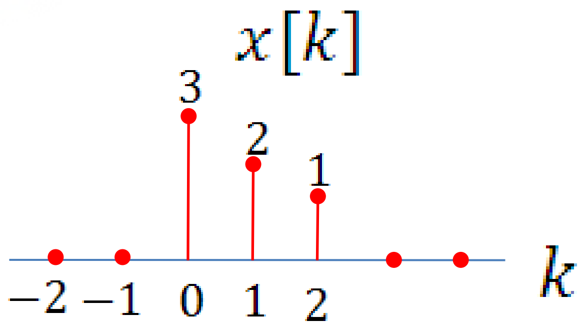
۴) Multiply : $g_n[k] = x[k].h[n-k]$

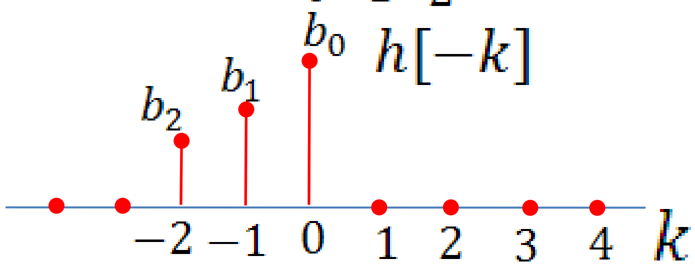
۵) Sum : $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_n[k]$

در این مثال ملاحظه می‌شود که برای nهای منفی، $h[n-k]$ و $x[k]$ هم پوشانی ندارند.
بنابراین:

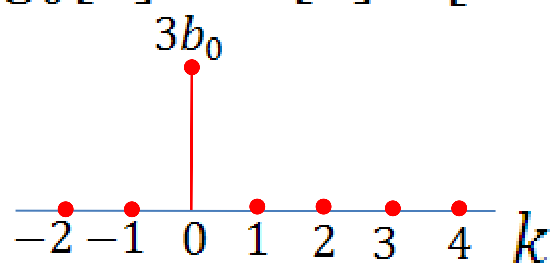
$$for\ n<0:\ g_n[k]=0\ \forall k \Rightarrow y[n]=0\ \forall n<0$$

برای $n=0$ داریم :



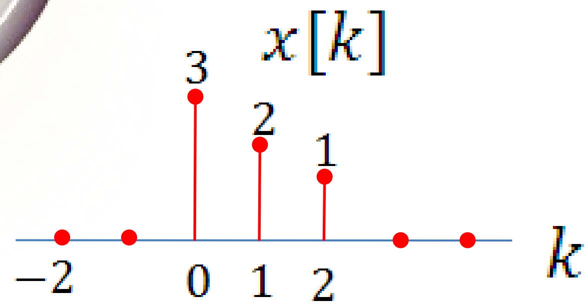


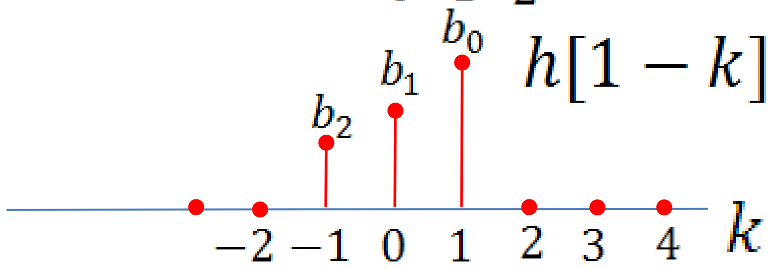
$$g_0[k]=x[k].h[-k]$$



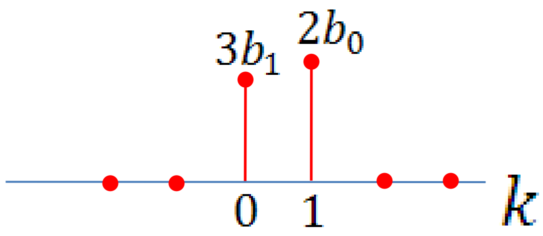
$$y[0]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} g_0[k]=3b_0$$

و برای $n=1$ داریم :





$$g_1[k] = x[k].\,h[1-k]$$



$$y[1] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_1[k] = 3b_1 + 2b_0$$

نکتهٔ مهمی که در این روش باید به آن توجه کرد این است که:

y[n] را باید به ازای همهٔ nها تعیین کنیم.

برای انجام چنین کاری:

باید بازه‌های مناسبی برای n در نظر بگیریم به طوری که فرم تابعی $g_n[k]$ راbتوانیم بنویسیم.

مثال ۱ :

$$h[n] = a^n u[n] \;, \qquad |a| < 1$$

$$x[n] = u[n]$$

مثال ۲ :

$$h[n] = \begin{cases} a^n & , \quad 0 \le n \le 6 \\ 0 & , \quad otherwise \end{cases}$$

$$x[n] = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \le n \le 4 \\ 0 & , \quad otherwise \end{cases}$$