



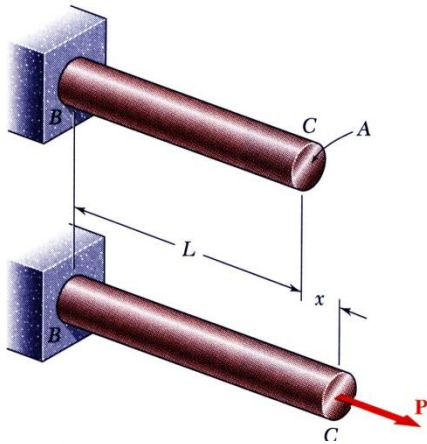
مقاومت مصالح ۲

فصل ۱۱: روش های انرژی

11. Energy Methods

دکتر محمد رضا نیرومند
دانشگاه پیام نور اصفهان

انرژی کرنشی

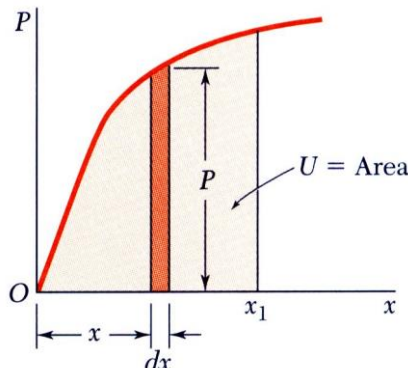


- میله ای با مقطع یکنواخت تحت تاثیر بار محوری افزایشی P را در نظر بگیرید.

$$dU = P dx$$

- کار جزیی نیروی P برابر است با:

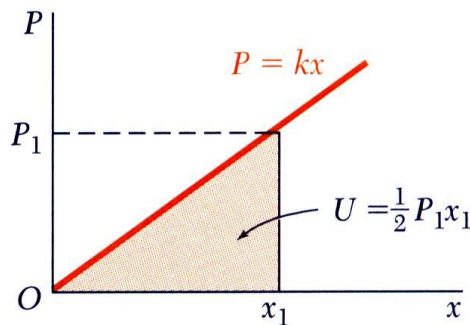
که برابر است با جزء سطح زیر منحنی بار-انحراف.



- برای کشیدگی x_1 ، کار کل انجام شده توسط بار P برابر است با:

$$U = \int_0^{x_1} P dx = \text{total work} = \text{strain energy}$$

- کار انجام شده توسط بار P هنگام اعمال آهسته (افزایش تدریجی از صفر تا P) به صورت انرژی کرنشی در میله ذخیره می شود.

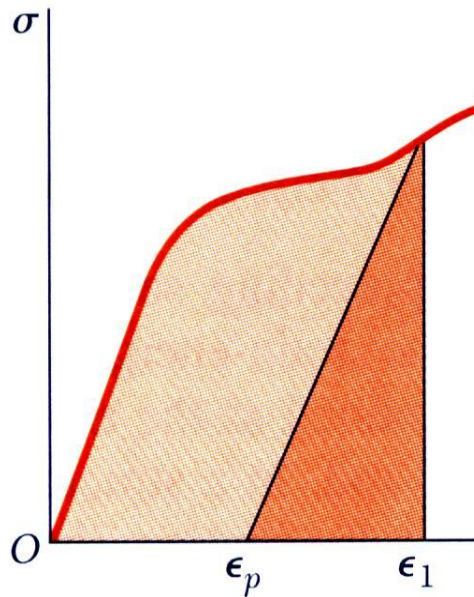


- در تغییر شکل خطی و الاستیک:

$$U = \int_0^{x_1} kx dx = \frac{1}{2} kx_1^2 = \frac{1}{2} P_1 x_1$$

چگالی انرژی کرنشی

- در مقاومت مصالح ۱ دیدیم که نمودار بار-انحراف برای یک میله بستگی به طول میله و سطح مقطع آن دارد.



- لذا انرژی کرنشی نیز به ابعاد میله بستگی دارد.

- برای حذف تاثیر ابعاد میله، انرژی کرنشی برای حجم واحد را در نظر می گیریم.

$$\frac{U}{V} = \int_0^{x_1} \frac{P}{A} \frac{dx}{L}$$

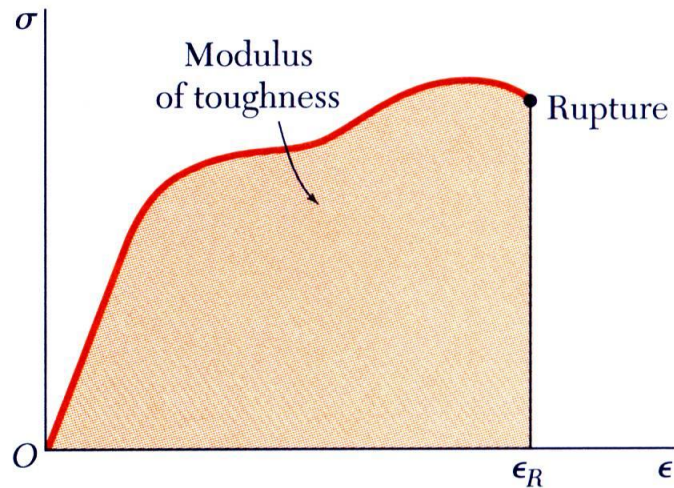
$$u = \int_0^{\epsilon_1} \sigma_x d\epsilon = \text{strain energy density} \quad (\text{چگالی انرژی کرنشی})$$

- چگالی انرژی کرنشی برابر است با سطح زیر منحنی تنش-کرنش از $\epsilon_x = 0$ تا $\epsilon_x = \epsilon_1$

- پس از حذف بار، تنش به صفر می رسد. اما کرنش دائمی ϵ_p بر جای می ماند.

- بنابراین فقط انرژی کرنشی مربوط به قسمت مثلی بازیافت می شود و بقیه آن بصورت گرما هدر می رود.

چگالی انرژی کرنشی



• از جایگذاری ϵ_R بجای ϵ_1 در معادله قبل، مدول چقرمگی بدست می آید.

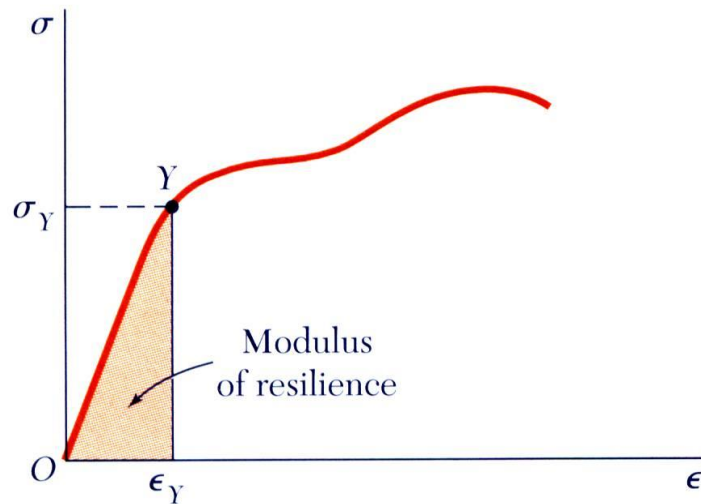
• مدول چقرمگی یک ماده که بستگی به چکش خواری و استحکام نهایی آن دارد، ضربه پذیری سازه را نشان می دهد.

• اگر تنش σ_x در یک عضو کمتر از حد تناسب آن باشد:

$$u = \int_0^{\epsilon_1} E \epsilon_x d\epsilon_x = \frac{E \epsilon_1^2}{2} = \frac{\sigma_1^2}{2E}$$

• از جایگذاری استحکام تسلیم σ_Y در رابطه قبل، مدول برجهندگی u_Y بدست می آید.

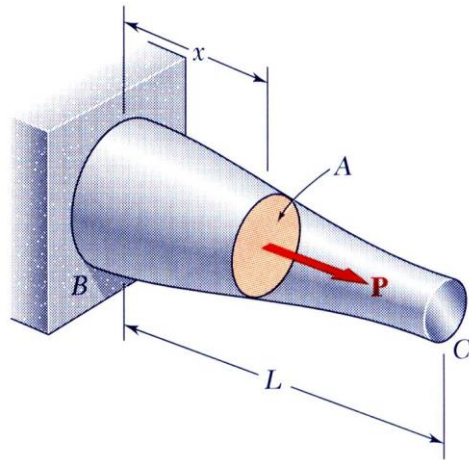
$$u_Y = \frac{\sigma_Y^2}{2E} = \text{modulus of resilience}$$



انرژی کرنشی الاستیک بر اثر تنش های قائم

- برای عضوی که توزیع تنش در آن غیر یکنواخت است.

$$U = \int u \, dV = \text{total strain energy}$$



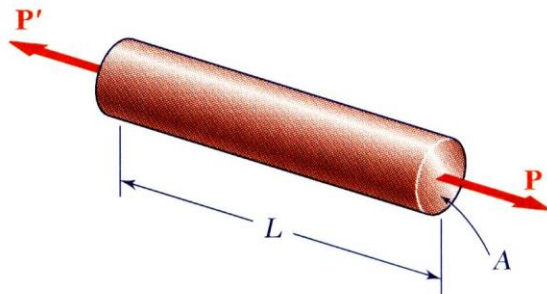
- اگر σ_x در یک عضو کمتر از حد تناسب باشد، $u < u_Y$

$$U = \int \frac{\sigma_x^2}{2E} dV = \text{elastic strain energy} \quad \text{انرژی کرنشی الاستیک}$$

- برای جسمی که تحت تنش قائم تک محوری قرار دارد.

$$\sigma_x = P/A \quad dV = A \, dx$$

$$U = \int_0^L \frac{P^2}{2AE} dx$$



- برای میله ای با مقطع عرضی یکنواخت:

$$U = \frac{P^2 L}{2AE}$$

انرژی کرنشی الاستیک بر اثر تنش های قائم

انرژی کرنشی بر اثر خمشی:

- برای تیر تحت بارگذاری خمشی:

$$U = \int \frac{\sigma_x^2}{2E} dV = \int \frac{M^2 y^2}{2EI^2} dV$$

$$dV = dA dx$$

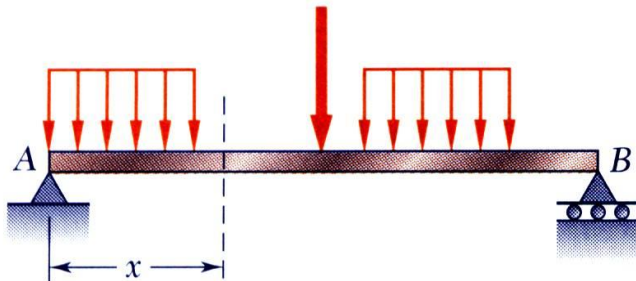
$$U = \int_0^L \int_A \frac{M^2 y^2}{2EI^2} dA dx = \int_0^L \frac{M^2}{2EI^2} \left(\int_A y^2 dA \right) dx$$

$$= \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx$$

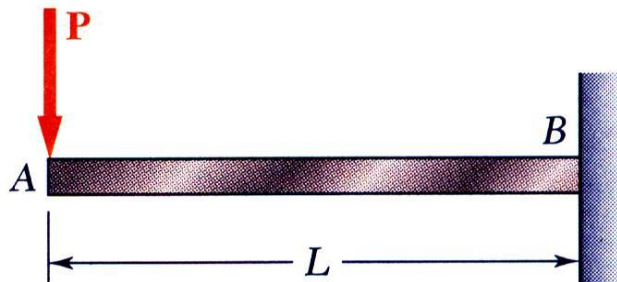
- برای تیر طره ای که در انتها تحت بار P است:

$$M = -Px$$

$$U = \int_0^L \frac{P^2 x^2}{2EI} dx = \frac{P^2 L^3}{6EI}$$

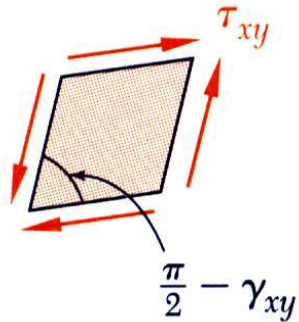


$$\sigma_x = \frac{My}{I}$$



انرژی کرنشی الاستیک بر اثر تنش برشی

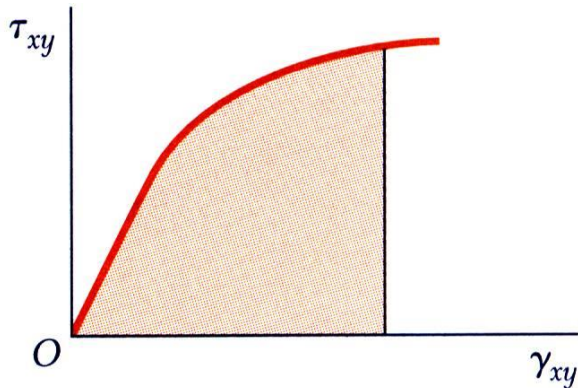
- برای عضوی که تحت تنش برشی τ_{xy} قرار دارد:



$$u = \int_0^{\gamma_{xy}} \tau_{xy} d\gamma_{xy}$$

- اگر τ_{xy} کمتر از حد تناسب باشد:

$$u = \frac{1}{2} G \gamma_{xy}^2 = \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}^2}{2G}$$



- انرژی کرنشی کل برابر است با:

$$U = \int u dV$$

$$= \int \frac{\tau_{xy}^2}{2G} dV$$

انرژی کرنشی الاستیک بر اثر تنش برشی

- برای یک شافت تحت بارگذاری پیچشی:

$$U = \int \frac{\tau_{xy}^2}{2G} dV = \int \frac{T^2 \rho^2}{2GJ^2} dV$$

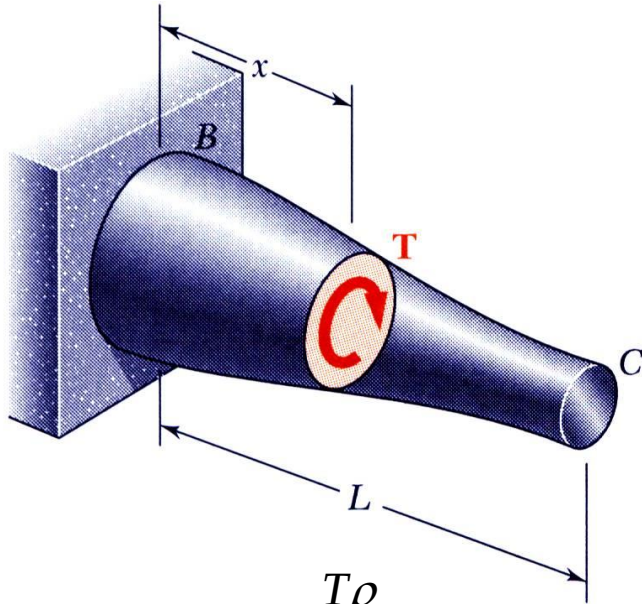
$$dV = dA dx$$

$$U = \int_0^L \int_A \frac{T^2 \rho^2}{2GJ^2} dA dx = \int_0^L \frac{T^2}{2GJ^2} \left(\int_A \rho^2 dA \right) dx$$

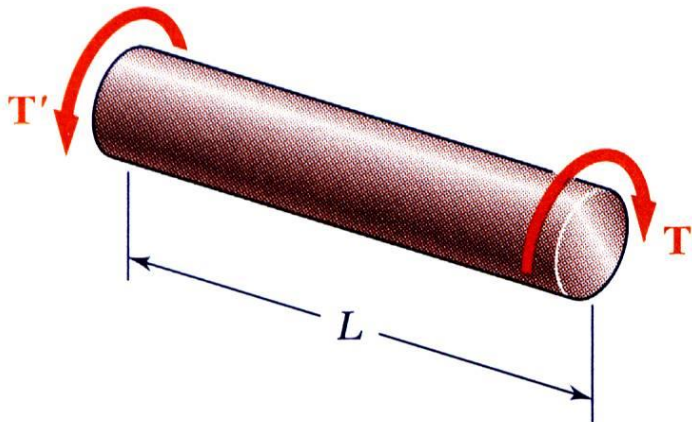
$$= \int_0^L \frac{T^2}{2GJ} dx$$

- برای یک شافت با مقطع عرضی یکنواخت:

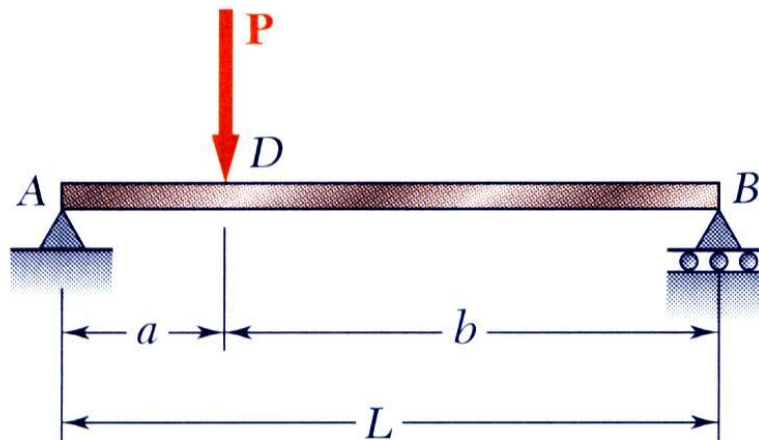
$$U = \frac{T^2 L}{2GJ}$$



$$\tau_{xy} = \frac{T\rho}{J}$$



مسئله نمونه ۱۱-۲



انرژی کرنشی تیر AB را بیابید.

(فقط تنش های قائم ناشی از خمش ها را در نظر بگیرید.)

$$W10 \times 45, \quad P = 40 \text{ kips}, \quad L = 12 \text{ ft}$$

$$a = 3 \text{ ft}, \quad b = 9 \text{ ft}, \quad E = 29 \times 10^6 \text{ psi}$$

مسئله نمونه ۱۱-۲

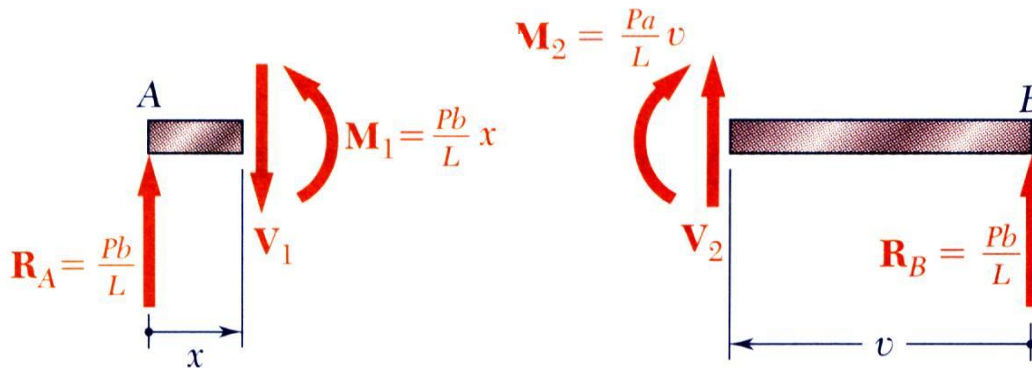
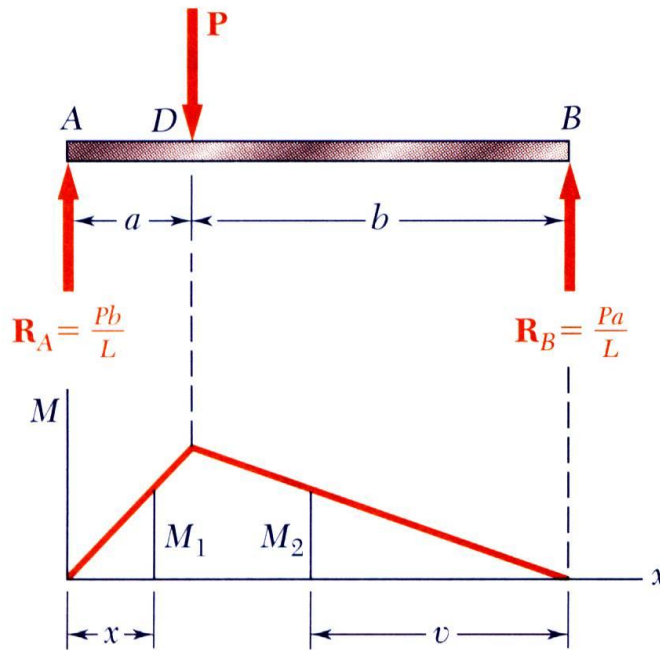
حل:

- نیروهای تکیه گاهی

$$R_A = \frac{Pb}{L} \quad R_B = \frac{Pa}{L}$$

- دیاگرام گشتاور خمشی

$$M_1 = \frac{Pb}{L}x \quad M_2 = \frac{Pa}{L}v$$



مسئله نمونه ۱۱-۲

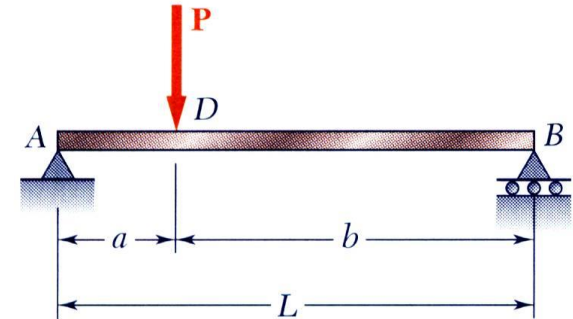
• انتگرال گیری جهت محاسبه انرژی کرنشی

$$\begin{aligned}
 U &= \int_0^a \frac{M_1^2}{2EI} dx + \int_0^b \frac{M_2^2}{2EI} dv \\
 &= \frac{1}{2EI} \int_0^a \left(\frac{Pb}{L} x \right)^2 dx + \frac{1}{2EI} \int_0^b \left(\frac{Pa}{L} x \right)^2 dx \\
 &= \frac{1}{2EI} \frac{P^2}{L^2} \left(\frac{b^2 a^3}{3} + \frac{a^2 b^3}{3} \right) = \frac{P^2 a^2 b^2}{6EI L^2} (a + b)
 \end{aligned}$$

$$U = \frac{P^2 a^2 b^2}{6EI L}$$

$$U = \frac{(40 \text{ kips})^2 (36 \text{ in})^2 (108 \text{ in})^2}{6 (29 \times 10^3 \text{ ksi}) (248 \text{ in}^4) (144 \text{ in})}$$

$$U = 3.89 \text{ in} \cdot \text{kips}$$



در قسمت AD:

$$M_1 = \frac{Pb}{L} x$$

در قسمت BD:

$$M_2 = \frac{Pa}{L} v$$

$$P = 45 \text{ kips} \quad L = 144 \text{ in.}$$

$$a = 36 \text{ in.} \quad b = 108 \text{ in.}$$

$$E = 29 \times 10^3 \text{ ksi} \quad I = 248 \text{ in}^4$$

انرژی کرنشی بر اثر حالت کلی تنش

- در قسمت های قبل انرژی کرنشی ناشی از تنش قائم تک محوری و تنش برشی صفحه ای را بدست آوردیم.
- برای تعیین انرژی کرنشی بر اثر تنش های کلی:

$$u = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx})$$

- برای یک جسم الاستیک همسانگرد با استفاده از محورهاى اصلی:

$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_a^2 + \sigma_b^2 + \sigma_c^2 - 2\nu(\sigma_a \sigma_b + \sigma_b \sigma_c + \sigma_c \sigma_a)]$$

$$= u_v + u_d$$

$$u_v = \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_a + \sigma_b + \sigma_c)^2 = \text{due to volume change} \quad \text{تغییر حجم}$$

$$u_d = \frac{1}{12G} [(\sigma_a - \sigma_b)^2 + (\sigma_b - \sigma_c)^2 + (\sigma_c - \sigma_a)^2] = \text{due to distortion} \quad \text{تغییر شکل}$$

- در حالت تنش صفحه ای و با فرض اینکه محور C بر صفحه تنش عمود است، $\sigma_c = 0$:

$$u_d = \frac{1}{6G} (\sigma_a^2 - \sigma_a \sigma_b + \sigma_b^2)$$

$$u_d < (u_d)_Y = \frac{\sigma_Y^2}{6G} \quad \text{در فصل ۷ دیدیم طبق معیار ماکزیمم انرژی تغییر شکل (فون میزز):}$$

کار و انرژی برای بار تنها

- از طرفی انرژی کرنشی را می توان با استفاده از کار نیروی تنهای P_1 بدست آورد.

$$U = \int_0^{x_1} P dx$$

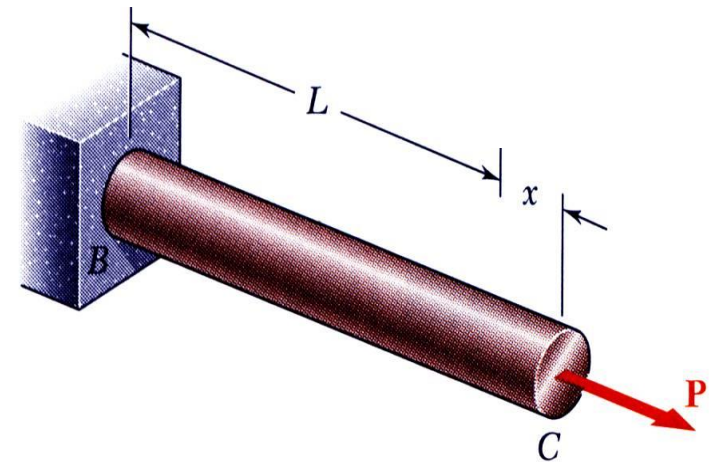
- در تغییر شکل الاستیک

$$U = \int_0^{x_1} P dx = \int_0^{x_1} kx dx = \frac{1}{2} k x_1^2 = \frac{1}{2} P_1 x_1$$

- با کمک رابطه بین نیرو و تغییر طول به همان رابطه قبلی برای انرژی کرنشی می رسیم.

$$x_1 = \frac{P_1 L}{AE}$$

$$U = \frac{1}{2} P_1 \left(\frac{P_1 L}{AE} \right) = \frac{P_1^2 L}{2AE}$$



- تاکنون انرژی کرنشی را با انتگرال گیری از چگالی انرژی کرنشی بدست می آوردیم.
- برای یک میله یکنواخت:

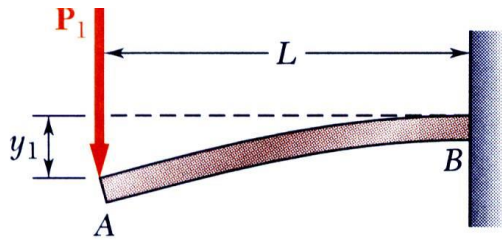
$$U = \int u dV = \int \frac{\sigma^2}{2E} dV$$

$$= \int_0^L \frac{(P_1/A)^2}{2E} A dx = \frac{P_1^2 L}{2AE}$$

کار و انرژی برای بار تنها

- در خصوص سایر بارگذاری ها نیز انرژی کرنشی را می توان با استفاده از کار انجام شده بدست آورد.

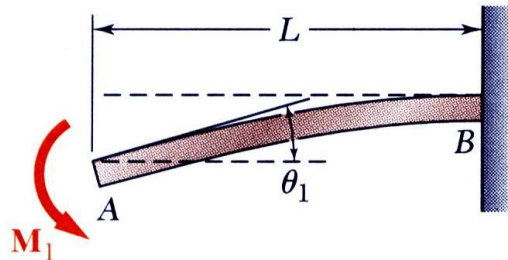
بارگذاری عرضی



$$U = \int_0^{y_1} P dy = \frac{1}{2} P_1 y_1$$

$$= \frac{1}{2} P_1 \left(\frac{P_1 L^3}{3EI} \right) = \frac{P_1^2 L^3}{6EI}$$

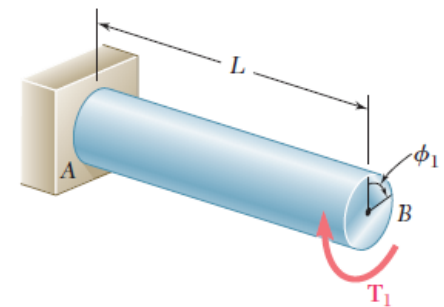
گشتاور خمشی



$$U = \int_0^{\theta_1} M d\theta = \frac{1}{2} M_1 \theta_1$$

$$= \frac{1}{2} M_1 \left(\frac{M_1 L}{EI} \right) = \frac{M_1^2 L}{2EI}$$

کوئل پیچشی



$$U = \int_0^{\phi_1} T d\phi = \frac{1}{2} T_1 \phi_1$$

$$= \frac{1}{2} T_1 \left(\frac{T_1 L}{JG} \right) = \frac{T_1^2 L}{2JG}$$

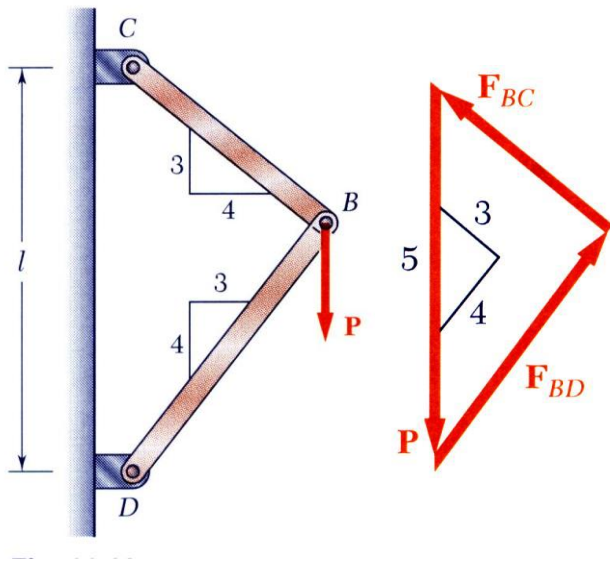
تعیین انحراف با استفاده از روش کار- انرژی

- روابط هندسی:

$$L_{BC} = 0.6l \quad L_{BD} = 0.8l$$

- از استاتیک:

$$F_{BC} = +0.6P \quad F_{BD} = -0.8P$$



- اگر انرژی کرنشی ناشی از یک بار تنها مشخص باشد، با مساوی قرار دادن انرژی کرنشی و کار حاصل از بار می توان انحراف را بدست آورد.

- مساوی قرار دادن کار با انرژی:

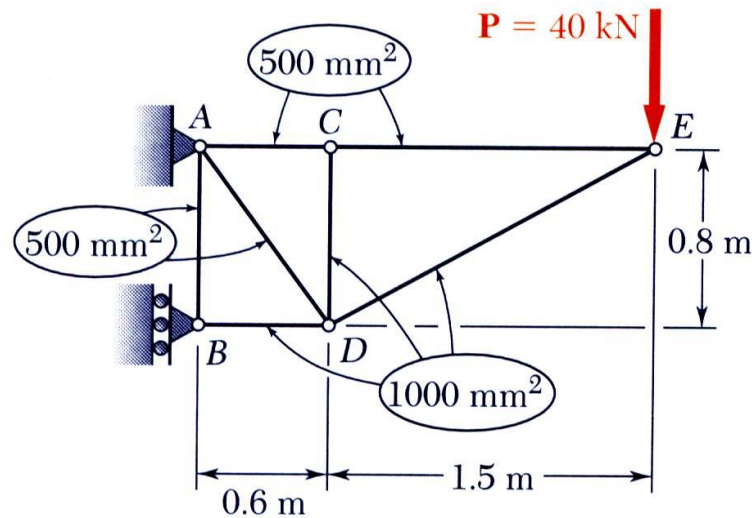
$$U = 0.364 \frac{P^2 L}{AE} = \frac{1}{2} P y_B$$

$$y_B = 0.728 \frac{Pl}{AE}$$

- انرژی کرنشی سازه:

$$\begin{aligned} U &= \frac{F_{BC}^2 L_{BC}}{2AE} + \frac{F_{BD}^2 L_{BD}}{2AE} \\ &= \frac{P^2 l [(0.6)^3 + (0.8)^3]}{2AE} = 0.364 \frac{P^2 l}{AE} \end{aligned}$$

مسئله نمونه ۱۱-۴



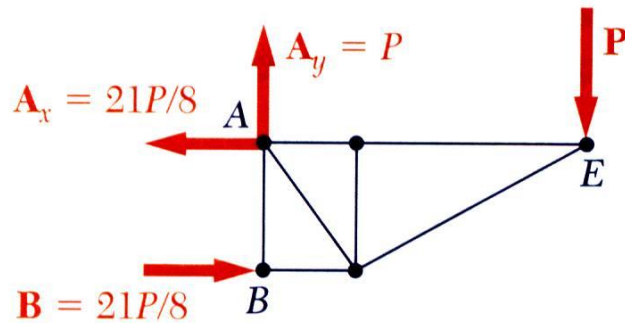
جابجایی عمودی نقطه E ناشی از بار P را بدست آورید.

$$E = 73 \text{ GPa}$$

مسئله نمونه ۱۱-۴

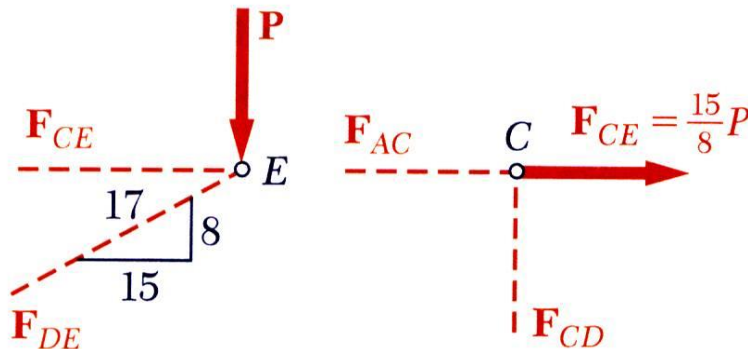
حل:

- نیروهای تکیه گاهی



$$A_x = -21P/8 \quad A_y = P \quad B = 21P/8$$

- تعیین نیروی محوری در هر عضو به روش مفصل

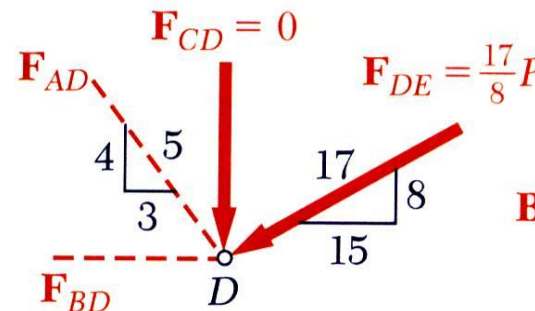


$$F_{DE} = -\frac{17}{8}P$$

$$F_{AC} = +\frac{15}{8}P$$

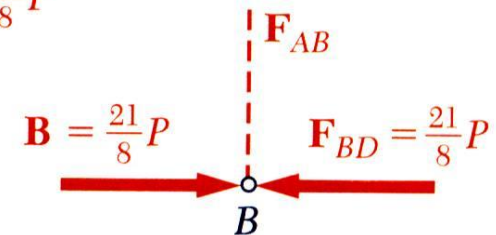
$$F_{CE} = +\frac{15}{8}P$$

$$F_{CD} = 0$$



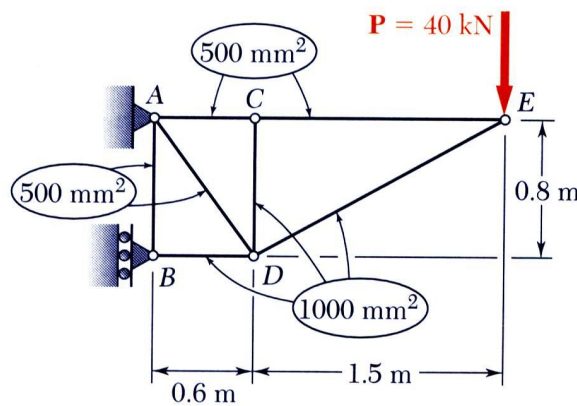
$$F_{AD} = \frac{5}{4}P$$

$$F_{BD} = -\frac{21}{8}P$$



$$F_{AB} = 0$$

مسئله نمونه ۱۱-۴



Member	F_i	L_i, m	A_i, m^2	$\frac{F_i^2 L_i}{A_i}$
AB	0	0.8	500×10^{-6}	0
AC	$+15P/8$	0.6	500×10^{-6}	$4\,219P^2$
AD	$+5P/4$	1.0	500×10^{-6}	$3\,125P^2$
BD	$-21P/8$	0.6	1000×10^{-6}	$4\,134P^2$
CD	0	0.8	1000×10^{-6}	0
CE	$+15P/8$	1.5	500×10^{-6}	$10\,547P^2$
DE	$-17P/8$	1.7	1000×10^{-6}	$7\,677P^2$

• انرژی کرنشی را با کار انجام شده توسط نیروی P مساوی قرار داده و جابجایی را محاسبه کنید.

• انرژی کرنشی خریا در اثر نیروی P را بدست آورید.

$$\frac{1}{2} P y_E = U$$

$$y_E = \frac{2U}{P} = \frac{2}{P} \left(\frac{29700P^2}{2E} \right)$$

$$y_E = \frac{(29.7 \times 10^3)(40 \times 10^3)}{73 \times 10^9}$$

$$y_E = 16.27 \text{ mm} \downarrow$$

$$U = \sum \frac{F_i^2 L_i}{2A_i E} = \frac{1}{2E} \sum \frac{F_i^2 L_i}{A_i}$$

$$= \frac{1}{2E} (29700P^2)$$

کار و انرژی برای چند نیرو

- انحراف یک تیر الاستیک در اثر دو بار متمرکز:

$$x_1 = x_{11} + x_{12} = \alpha_{11}P_1 + \alpha_{12}P_2$$

$$x_2 = x_{21} + x_{22} = \alpha_{21}P_1 + \alpha_{22}P_2$$

α_{11} و α_{21} انحراف نقاط C_1 و C_2 بر اثر بار واحد در نقطه C_1 را نشان می دهد.

- محاسبه انرژی کرنشی تیر از طریق کار نیروها با اعمال تدریجی بار P_1 و سپس اعمال تدریجی بار P_2 . البته در اینصورت هنگام اعمال بار P_2 در نقطه اثر نیروی P_1 ، بار P_1 به طور کامل وارد می شود. (P_x)

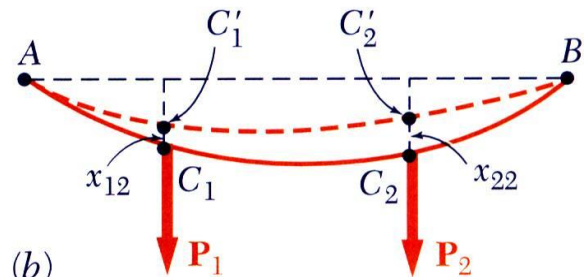
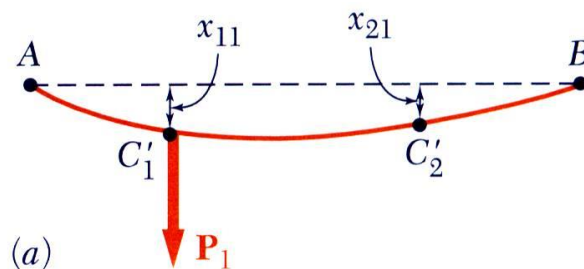
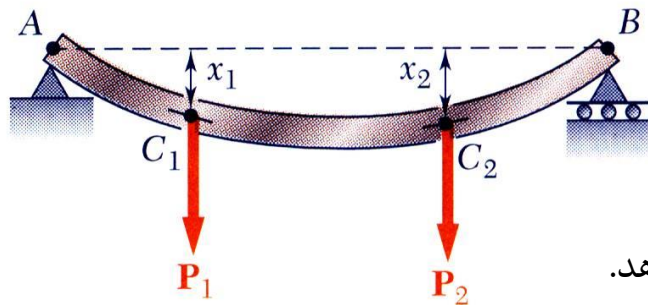
$$U = \frac{1}{2}(\alpha_{11}P_1^2 + 2\alpha_{12}P_1P_2 + \alpha_{22}P_2^2)$$

- اگر بر خلاف حالت قبل، ابتدا بار P_2 و سپس بار P_1 اعمال شود.

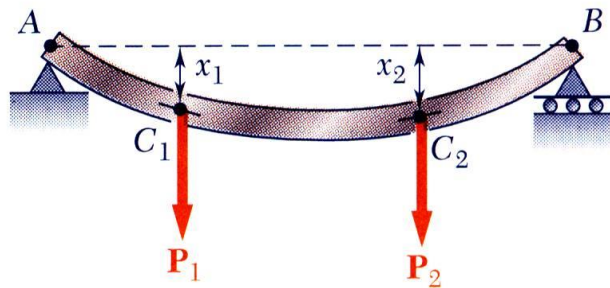
$$U = \frac{1}{2}(\alpha_{22}P_2^2 + 2\alpha_{21}P_2P_1 + \alpha_{11}P_1^2)$$

- با مساوی قرار دادن سمت راست عبارات فوق نتیجه می شود:
 $\alpha_{12} = \alpha_{21}$ که به آن قضیه تقابل ماکسول می گویند:

قضیه تقابل ماکسول: انحراف نقطه C_1 بر اثر بار واحد وارده در نقطه C_2 برابر است با انحراف نقطه C_2 بر اثر بار واحد وارده در نقطه C_1 .



قضیه کاستیگلیانو



- انرژی کرنشی یک سازه الاستیک تحت تاثیر دو بار متمرکز

$$U = \frac{1}{2} (\alpha_{11}P_1^2 + 2\alpha_{12}P_1P_2 + \alpha_{22}P_2^2)$$

- مشتق گیری نسبت به بارها:

$$\frac{\partial U}{\partial P_1} = \alpha_{11}P_1 + \alpha_{12}P_2 = x_1$$

$$\frac{\partial U}{\partial P_2} = \alpha_{12}P_1 + \alpha_{22}P_2 = x_2$$

- بطور مشابه برای تعیین شیب یک تیر در نقطه اثر کوپل تدریجی M_j و همچنین زاویه پیچش ϕ_j در قسمتی از یک شافت که در آن کوپل تدریجی وارد می شود.

$$\theta_j = \frac{\partial U}{\partial M_j} \quad \phi_j = \frac{\partial U}{\partial T_j}$$

قضیه کاستیگلیانو: برای یک سازه الاستیک تحت n

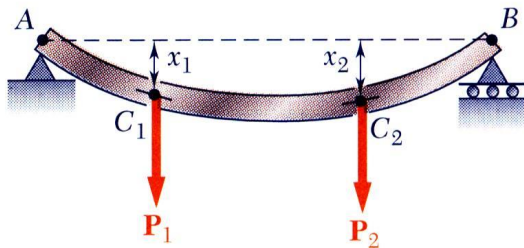
بار، انحراف نقطه اثر بار P_j که در امتداد خط اثر این بار اندازه گیری می شود (x_j) از رابطه زیر بدست می آید:

$$x_j = \frac{\partial U}{\partial P_j}$$

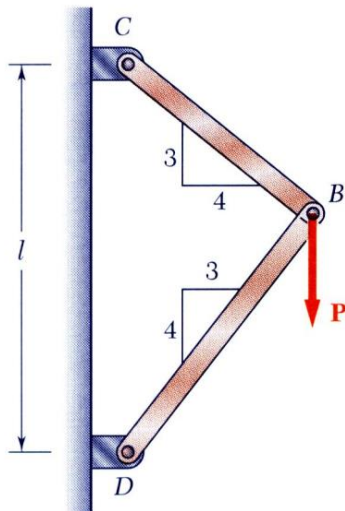
تعیین انحراف با استفاده از قضیه کاستیگلیانو

- اگر قبل از انتگرال گیری یا جمع آثار جهت محاسبه انرژی کرنشی، مشتق گیری نسبت به بار انجام گیرد، استفاده از قضیه کاستیگلیانو ساده خواهد شد.

- برای تیر:



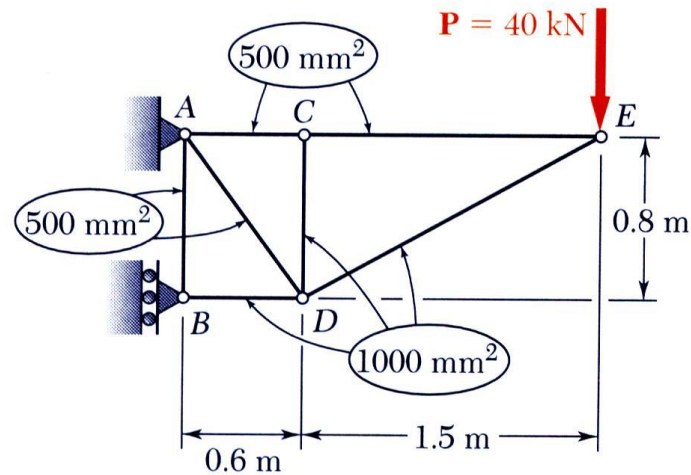
$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx \quad x_j = \frac{\partial U}{\partial P_j} = \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P_j} dx$$



- برای خرپا متشکل از n عضو یکنواخت:

$$U = \sum_{i=1}^n \frac{F_i^2 L_i}{2A_i E} \quad x_j = \frac{\partial U}{\partial P_j} = \sum_{i=1}^n \frac{F_i L_i}{A_i E} \frac{\partial F_i}{\partial P_j}$$

مسئله نمونه ۱۱-۵



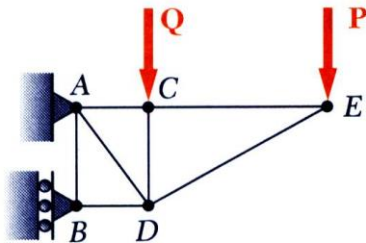
برای خردپای نشان داده شده، انحراف عمودی مفصل C را بیابید.

$$E = 73 \text{ GPa}$$



مسئله نمونه ۱۱-۵

حل:

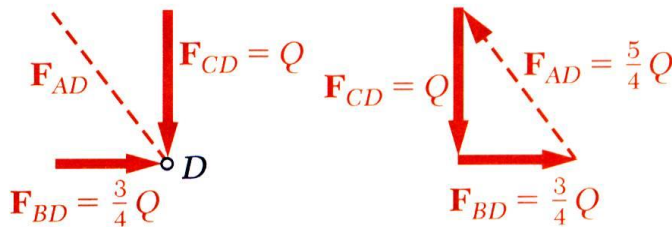
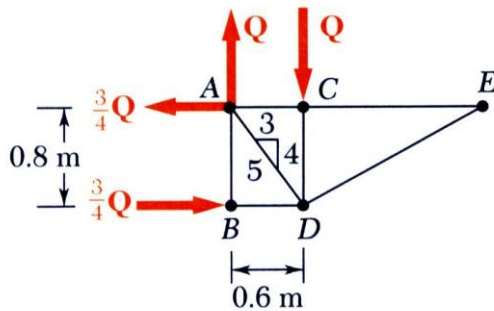


- هیچگونه بار عمودی بر مفصل C وارد نمی شود. بنابراین بار فرضی Q را مطابق شکل بر این مفصل وارد می کنیم.

- محاسبه نیروهای تکیه گاهی در اثر بار Q با استفاده از دیگرام آزاد کل خریا

$$A_x = -\frac{3}{4}Q \quad A_y = Q \quad B = \frac{3}{4}Q$$

- محاسبه نیرو در اعضا بر اثر بار Q به کمک روش مفصل



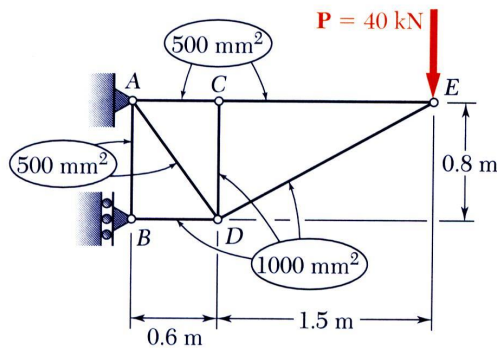
$$F_{CE} = F_{DE} = 0$$

$$F_{AC} = 0; F_{CD} = -Q$$

$$F_{AB} = 0; F_{BD} = -\frac{3}{4}Q$$

مسئله نمونه ۱۱-۵

در مسئله نمونه ۱۱-۴ نیرو در هر عضو را بر اثر بار P بدست آوردیم. حال جدول زیر را کامل می کنیم.
 F_i نیرو در عضو i ناشی از بارهای P و Q است.



Member	F_i	$\partial F_i / \partial Q$	$L_i, \text{ m}$	$A_i, \text{ m}^2$	$\left(\frac{F_i L_i}{A_i} \right) \frac{\partial F_i}{\partial Q}$
AB	0	0	0.8	500×10^{-6}	0
AC	$+15P/8$	0	0.6	500×10^{-6}	0
AD	$+5P/4 + 5Q/4$	$5/4$	1.0	500×10^{-6}	$+3125P + 3125Q$
BD	$-21P/8 - 3Q/4$	$-3/4$	0.6	1000×10^{-6}	$+1181P + 338Q$
CD	$-Q$	-1	0.8	1000×10^{-6}	$+800Q$
CE	$+15P/8$	0	1.5	500×10^{-6}	0
DE	$-17P/8$	0	1.7	1000×10^{-6}	0

• محاسبه انحراف مفصل C:

$$y_C = \sum \left(\frac{F_i L_i}{A_i E} \right) \frac{\partial F_i}{\partial Q} = \frac{1}{E} (4306P + 4263Q)$$

• قرار دادن: $E = 73 \text{ GPa}$, $P = 40 \text{ kN}$, $Q = 0$

$$y_C = \frac{4306(40 \times 10^3 \text{ N})}{73 \times 10^9 \text{ Pa}}$$

$$y_C = 2.36 \text{ mm} \downarrow$$